Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Coordinación Matemática FAE
Curso Matemática V
Carrera Ingeniería Comercial

Guía de Ejercicios N°1
Primer Semestre 2015

Profesor: Boris Brayovic.
Ayudante: Daniela Ponce.

Problema 1 En un vecindario existen 4 locales para tomar café. Suponga que un avezado economista se lanza en paracaídas a dicho vecindario, teniendo igual probabilidad de caer en cada uno de los locales. Ya en tierra firme, el economista se dedica a deambular entre los diferentes locales considerando que, dada la geografía del sector, desde el local 1 hay camino para llegar sólo al local 2, desde el local 3 hay camino para llegar a los locales 2 y 4 y desde el local 4 hay camino para llegar a los locales 3 y 2. Si el economista planea quedarse una hora en cada local que visita, y asumiendo que al cabo de cada hora distribuye uniformemente las probabilidades de cambiarse a otro local, responda lo siguiente:

1. Defina el proceso de Markov asociado, con su respectivo espacio de estados.
2. Determine la matriz de transición del proceso y el vector de probabilidades iniciales.
3. Pruebe que el proceso es regular.
4. Calcule la probabilidad de que el economista se encuentre en el local 4 a 2 horas de su aterrizaje.
5. Si en determinado momento el economista está en el local 2, ¿cuál es la probabilidad de que al cabo de 3 horas se encuentre en el local 3?.

6. Calcule la probabilidad de que el economista aterrice en el local 3, una hora después se encuentre en el local 4, una hora después se encuentre en el local 2 y una hora después vuelva al local 3.

7. Determine la distribución de probabilidades correspondiente al estado estacionario del proceso.

8. Estime la probabilidad de que en 50 años el economista se encuentre en el local 2.

Problema 2 Considere un proceso de Markov $\{X_n\,,\, n \geq 0\}$ con espacio de estados $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Suponga que $p_{04} = 1$ y suponga además que cuando el proceso se encuentra en el estado i, $i > 0$, el siguiente estado puede ser, con igual probabilidad, cualquier elemento del conjunto $\{0, \ldots, i-1\}$. Entonces:

1. Determine la matriz de transición del proceso.

2. Calcule $p_{12}(2)$, $p_{03}(2)$ y $p_{03}(3)$.

3. Asuma que el proceso es regular. Determine la distribución de probabilidades correspondiente al estado estacionario del proceso.

Problema 3 Sean X y F subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $X \subset F$ y F es cerrado. Demuestre que $\overline{X} \subset F$. ¿Es válido el resultado si X y F son ahora subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, con $n > 1$ fijo?.

Problema 4 Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, con n fijo. Demuestre que $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Problema 5 Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, con n fijo. Demuestre que int(int(A))=int(A).

Problema 6 Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Pruebe que:

1. $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B) \subset \mathrm{int}(A \cup B)$.

2. $\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) = \mathrm{int}(A \cap B)$.

Problema 7 De un ejemplo de dos subconjuntos $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ tales que

$$\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B) \neq \mathrm{int}(A \cup B)\,.$$

Problema 8 Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Pruebe que:

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Problema 9 De un ejemplo de dos subconjuntos $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ tales que

$$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}\,.$$

Problema 10 Demuestre que A es cerrado en $\mathbb{R}^2$, donde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = y\}\,.$$

Problema 11 Demuestre que B es abierto en $\mathbb{R}^2$, donde

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0\,,\; y > 0\}\,.$$

Problema 12 Utilice la definición de límite para probar que:

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-2} = 1\,.$

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{5n^2-1} = \frac{3}{5}\,.$