UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE. FACULTAD DE ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA.
DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA.

Pauta Control 1

Matemática V
Primer Semestre 2015

Profesor: Boris Brayovic.

Ayudante: Daniela Ponce.

Carrera: Ingeniería Comercial.

Problema 1 Sea X un conjunto. Si A y B son subconjuntos de X, demuestre que:

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
2. Generalice el resultado a n subconjuntos de X, es decir, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son subconjuntos de X, demuestre que

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_n^c\,.$$

Ayuda: Use inducción matemática.

Solución.

1. Para un elemento $x \in (A \cap B)^c$ se verifica

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\Longleftrightarrow x \notin (A \cap B) \\ &\Longleftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B) \\ &\Longleftrightarrow (x \in A^c) \vee (x \in B^c) \\ &\Longleftrightarrow x \in A^c \cup B^c\,. \end{aligned}$$

2. Para $n = 1$ la condición se cumple trivialmente. Supongamos que el resultado vale para $n = k$, es decir,

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_k^c \,.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k+1})^c &= ((A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \cap A_{k+1})^c \\
&= (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)^c \cup A_{k+1}^c \quad \text{(por parte 1)} \\
&= (A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_k^c) \cup A_{k+1}^c \quad \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_k^c \cup A_{k+1}^c \,.
\end{aligned}$$

Problema 2 Demuestre que:

1. Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.

2. Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $x + c < y + c$.

Solución.

1. $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0 \Longrightarrow$ existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}
a \cdot a^{-1} &= 1 \\
a^{-1} \cdot a &= 1
\end{aligned} \tag{1}$$

Luego, las ecuaciones en (1) indican que a es el inverso multiplicativo de a^{-1}, es decir,

$$a = (a^{-1})^{-1} \,.$$

2. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
x < y &\Longrightarrow (y - x) \in \mathbb{R}_+ \\
&\Longrightarrow (y - x) + 0 \in \mathbb{R}_+ \\
&\Longrightarrow (y - x) + (c - c) \in \mathbb{R}_+ \\
&\Longrightarrow (y + c) - (x + c) \in \mathbb{R}_+ \\
&\Longrightarrow x + c < y + c \,.
\end{aligned}$$

Problema 3 Calcule:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2+3n-4}{3n^2-1}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Solución.

1.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+3n-4}{3n^2-1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{5+0-0}{3-0} \qquad\qquad \text{(álgebra de límites)} \\
&= \frac{5}{3}\,.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(n+1)+2\sqrt{n^2+n}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(2n+1)+2\sqrt{n^2+n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n}+\frac{\sqrt{n}}{n}}{(2+\frac{1}{n})+\frac{2}{n}\sqrt{n^2+n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{(2+\frac{1}{n})+2\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \\
&= \frac{\sqrt{0+0}+\sqrt{0}}{(2+0)+2\sqrt{1+0}} \qquad\qquad \text{(álgebra de límites)} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$