

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Coordinación Matemática FAE
Curso Matemática V
Carrera Ingeniería Comercial

Prueba 1 Primer Semestre 2015

Profesor: Boris Brayovic.

Ayudante: Daniela Ponce.

Nombre Alumno:

Reglas: Se evaluarán sólo 3 de los 4 problemas, los cuales deben ser escogidos por usted. Una vez determinadas las 3 preguntas que va a resolver, la cuarta quedará invalidada, tenga o no un desarrollo.

Indique su elección:

Problema 1 Sean A y B subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n . Entonces:

1. Demuestre que $(A \cap B)$ es abierto en \mathbb{R}^n .
2. Use el resultado anterior para probar que la intersección de una cantidad finita de abiertos en \mathbb{R}^n es un abierto en \mathbb{R}^n .
3. Pruebe que la unión de una cantidad finita de cerrados en \mathbb{R}^n es un cerrado en \mathbb{R}^n .
4. Pruebe, mediante un ejemplo, que la intersección de una cantidad infinita de abiertos en \mathbb{R} no necesariamente es un abierto en \mathbb{R} .

Problema 2 En una determinada ciudad se da una fuerte competencia entre las tres marcas de jabón disponibles en el mercado. Estudios empíricos han estimado que los habitantes de dicha ciudad cambian constantemente la marca de jabón que usan, según el siguiente patrón:

- Si un cliente está usando la marca A , la probabilidad de que la semana siguiente se cambie a la marca B es 0.2 y la probabilidad de que se cambie a la marca C es 0.3.
- Si un cliente está usando la marca B , la probabilidad de que la semana siguiente se cambie a la marca C es 0.4, desestimando completamente la posibilidad de cambiarse a la marca A .
- Si un cliente está usando la marca C , la probabilidad de que la semana siguiente se cambie a la marca A es 0.2 y la probabilidad de que se cambie a la marca B es 0.4.

Suponga que la dinámica del proceso es markoviana. Entonces:

1. Defina el proceso de Markov asociado, con su respectivo espacio de estados y matriz de transición.
2. Pruebe que el proceso es regular.
3. Calcule la probabilidad de que un cliente que está usando el jabón marca A , al cabo de dos semanas esté usando el jabón marca C .
4. Si, actualmente, el porcentaje de clientes que está usando la marca A es 30% y el porcentaje de clientes que está usando la marca B es 20%, suponiendo que toda la ciudad usa jabón, encuentre la probabilidad de que dentro de dos semanas un cliente esté usando la marca C .
5. Utilizando los porcentajes de la pregunta previa, calcule la probabilidad de que un cliente esté usando hoy la marca B , la semana siguiente esté usando la marca C y la semana subsiguiente continúe usando la marca C .
6. Estime la probabilidad de que un cliente esté usando la marca B dentro de 10 años.

Problema 3 Responda lo siguiente:

1. Defina límite de una sucesión en \mathbb{R}^n .
2. Utilice la definición de límite en \mathbb{R} para probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{5n^2 - 1} = \frac{1}{5}.$$

Problema 4 En el contexto de \mathbb{R}^n , defina los siguientes conceptos:

1. Distancia entre dos elementos.
2. Bola abierta.
3. Conjunto abierto.
4. Conjunto cerrado.
5. Interior de un conjunto.
6. Clausura de un conjunto.
7. Frontera de un conjunto.
8. Conjunto acotado.
9. Conjunto compacto.