

Profesor: Coordinación para Ingeco

Solución al Prueba N° 1

1. Calcule las siguientes integrales indefinidas:

a)

$$\int x^9 \sqrt{6 - 3x^5} \, dx$$

Solución:

Consideremos:

$$\begin{aligned} u &= x^5 & v &= \frac{-2}{45}(6 - 3x^5)^{\frac{3}{2}} \\ du &= 5x^4 & dv &= x^4 \sqrt{6 - 3x^5} \, dx \end{aligned}$$

.....8 puntos
 luego;

$$\begin{aligned} & \int x^9 \sqrt{6 - 3x^5} \, dx \\ &= \int x^5 x^4 \sqrt{6 - 3x^5} \, dx \\ &= \frac{-2}{45} x^5 (6 - 3x^5)^{\frac{3}{2}} + \frac{10}{45} \int x^4 (6 - 3x^5)^{\frac{3}{2}} \, dx \\ &= \frac{-2}{45} x^5 (6 - 3x^5)^{\frac{3}{2}} + \frac{10}{45} \frac{-1}{15} \int (-15) x^4 (6 - 3x^5)^{\frac{3}{2}} \, dx \\ &= \frac{-2}{45} x^5 (6 - 3x^5)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{135} \frac{2}{5} (6 - 3x^5)^{\frac{5}{2}} + c \end{aligned}$$

.....12 puntos

b)

$$\int \frac{2x^2 - 3x - 36}{(2x - 1)(x^2 + 9)} \, dx$$

Solución:

Utilizamos descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{2x^2 - 3x - 36}{(2x - 1)(x^2 + 9)} = \frac{-4}{2x - 1} + \frac{3x}{x^2 + 9}$$

5 puntos.

Luego:

$$\int \frac{2x^2 - 3x - 36}{(2x - 1)(x^2 + 9)} dx = -4 \int \frac{dx}{2x - 1} + 3 \int \frac{x}{x^2 + 9} dx = -2 \ln |2x - 1| + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 9) + C$$

5 puntos.

2. a) Determinar si la siguiente integral impropia converge o diverge:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

En caso que sea convergente, determine el área de la región encerrada por la curva determinada por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$, y las rectas $x = 0$ e $y = 0$

Solución:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \\ & \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \\ & = \lim_{p \rightarrow 0} \int_p^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \lim_{p \rightarrow \infty} \int_1^p \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \\ & = \lim_{p \rightarrow 0} 2 \int_{p^2}^1 \frac{du}{(u^2+1)} + \lim_{p \rightarrow \infty} 2 \int_1^{p^2} \frac{du}{(u^2+1)} \\ & = \lim_{p \rightarrow 0} [2 \arctan u]_{p^2}^1 + \lim_{p \rightarrow \infty} [2 \arctan u]_1^{p^2} \\ & = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ & = \pi \end{aligned}$$

5 puntos el análisis de cada integral

- b) Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente integral impropia:

$$\int_1^{\infty} \frac{x^a}{\sqrt[3]{5x^2+x+2}} dx$$

converge.

Solución:

Utilizamos Criterio de comparación por el limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^a}{\sqrt[3]{5x^2+x+2}}}{\frac{1}{x^{2/3-a}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{5x^2+x+2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \neq 0$$

5 puntos.

Luego, la integral converge si y sólo si:

$$2/3 - a > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a < -1/3$$

5 puntos.

3. Dada la curva de ecuación:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

a) Parametrice la curva.

Solución:

Considere:

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos^3(t) \\ y(t) &= a \sin^3(t) \end{aligned}$$

con $t \in [0, 2\pi]$

10 puntos.

b) Encuentre el vector tangente a la curva en el punto determinado por $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Solución:

Sea:

$$\vec{r}(t) = (a \cos^3(t), a \sin^3(t))$$

función vectorial que representa a la curva. Luego el vector tangente en cualquier punto es:

$$\vec{r}'(t) = (-3a \cos^2(t) \sin(t), 3a \sin^2(t) \cos(t))$$

10 puntos.

Luego, el vector tangente en $t_0 = \pi/2$ es:

$$\vec{r}'(t) = (0, 0)$$

10 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.
Sin Consultas.