UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento de Matemática y C.C.
Coordinación Matemáticas FAE
Curso Matemática II
Carrera Ingeniería Comercial

CONTROL 1

Profesor(es): Cristian Cáceres Silva
Julio Videla
Fecha: 10/04/2015
Secciones: 1-2

Nombre...

1. Calcule los siguientes límites.

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+e^x}{1-2e^x}$

   Respuesta:

   Se tiene que

$$L = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{1+e^x}{e^x}}{\frac{1-2e^x}{e^x}} \right)$$

   al separar se obtiene

$$L = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{1}{e^x}+1}{\frac{1}{e^x}-2} \right)$$

   como $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{e^x}\right) = 0$, por lo tanto, $L = -\frac{1}{2}$.

   b) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1} \right)$

   Respuesta:

   Se tiene que

$$L = \lim_{x\to 2} \left(\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{6-x}+2}{\sqrt{6-x}+2} \cdot \frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{3-x}+1}$$

   al multiplicar

$$L = \lim_{x\to 2} \left(\frac{((6-x)-4)(\sqrt{3-x}+1)}{((3-x)-1)(\sqrt{6-x}+2)} \right)$$

   es decir,

$$L = \lim_{x\to 2} \left(\frac{(2-x)(\sqrt{3-x}+1)}{(2-x)(\sqrt{6-x}+2)} \right)$$

   al simplificar

$$L = \lim_{x\to 2} \left(\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{6-x}+2} \right)$$

   por lo tanto, $L = \frac{1}{2}$.

2. Determine los valores de a y b en $\mathbb{R}$ de forma que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & si \quad x < 0 \\ \\ b & si \quad x = 0 \\ \\ x^2 + x + a & si \quad x > 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$.

Respuesta:

Se tiene que $f(0) = b$, además

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \right)$$

amplificando por el factor $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}$ se obtiene que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right)$$

es decir, $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{2}$. Para el límite por la derecha de la función, se tiene que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x^2 + x + a \right)$$

es decir, $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = a$. Como $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, se obtiene que $a = \frac{1}{2}$. Con lo cual, $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}$. La función será continua si $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, por lo tanto, $b = \frac{1}{2}$.

3. Demuestre por definición de límite que $\displaystyle\lim_{x \to 3} \left(\frac{x}{x-1} \right) = \frac{3}{2}$.

Respuesta:

Dado $\epsilon > 0$ se quiere encontrar $\delta > 0$ tal que $|x-3| < \delta$ implique $\left| \frac{x}{x-1} - \frac{3}{2} \right| < \epsilon$. Para ello se tiene que $\left| \frac{x}{x-1} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{3-x}{2(x-1)} \right| = |x-3| \cdot \frac{1}{2|x-1|}$. Para despejar $|x-3|$ se necesita acotar $\frac{1}{2|x-1|}$, para ello se puede tomar el intervalo $(2,4)$ centrado en 3 de radio 1. Si $x \in (2,4)$ entonces $1 < x-1 < 3$. Por lo tanto $|x-3| \cdot \frac{1}{2|x-1|} < |x-3| \cdot \frac{1}{2}$ y si $\dfrac{|x-3|}{2} < \epsilon$ entonces $|x-3| < 2\epsilon$. Al elegir $\delta = inf\{1, 2\epsilon\}$, se tiene que si $|x-3| < \delta$, entonces $\left| \frac{x}{x-1} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{3-x}{2(x-1)} \right| = |x-3| \cdot \frac{1}{2|x-1|} < 2\epsilon \cdot \frac{1}{2} = \epsilon$.

DISPONE DE 60 MINUTOS PARA DESARROLLAR EL CONTROL
TODAS LAS RESPUESTAS DEBEN ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADAS
NO SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA NI CELULARES