Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Curso: Álgebra Lineal
Profesores: Cecilia Herrera - Mauricio Bravo

Control 01 - PAUTA

09 de Abril de 2015

1. Considere los vectores $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$, $\mathbf{w} = (-2, 1, 2)$ y $\mathbf{z} = (-1, 3, 0)$. Pruebe que se puede escribir el vector $\mathbf{u}$ como combinación lineal de $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{z}$.

   Solución:
   Debemos escribir $\mathbf{u}$ como combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{z}$, es decir, debemos encontrar los valores de α, β y γ tales que

   $$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} + \gamma\mathbf{z}$$

   por lo tanto

   $$(2, -1, 3) = \alpha(3, 0, 1) + \beta(-2, 1, 2) + \gamma(-1, 3, 0)$$

   $$(2, -1, 3) = (3\alpha - 2\beta - \gamma, \beta + 3\gamma, \alpha + 2\beta).$$

   Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones

   $$\begin{array}{rcr} 3\alpha - 2\beta - \gamma & = & 2 \\ \beta + 3\gamma & = & -1 \\ \alpha + 2\beta & = & 3 \end{array}$$

   La solución de este sistema es $\alpha = 7/5$, $\beta = 4/5$ y $\gamma = 3/5$.
   Por lo tanto

   $$\mathbf{u} = 7/5\mathbf{v} + 4/5\mathbf{w} + 3/5\mathbf{z}$$

2. *a*) Considere los siguientes puntos del plano $A = (0, 2)$, $B = (2, 6)$ y $C = (x, 0)$. Determinar el valor de x de modo que el triángulo ABC sea rectángulo en B
   Solución:
   Debemos hallar los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,6) - (0,2) = (2,4)$
$\overrightarrow{BC} = C - B = (x,0) - (2,6) = (x-2,-6)$
Ahora, estos vectores deben ser ortogonales, es decir $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, es decir

$$\begin{aligned} (2,4)\cdot(x-2,-6) &= 0 \\ 2x-4-24 &= 0 \\ x &= 14 \end{aligned}$$

b) Hallar el área del triángulo ABC

Solución:
Como el triángulo es recto en B, su área será $A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{BC}\|$.
Sabemos que

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AB}\| = \|(2,4)\| = \sqrt{4+16} &= 2\sqrt{5} \\ \|\overrightarrow{BC}\| = \|(12,-6)\| = \sqrt{144+36} &= 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto $A = \frac{1}{2}(2\sqrt{5})(6\sqrt{5}) = 30$

3. Sean $\mathbf{u} = (2,3)$, $\mathbf{v} = (3,2)$ y $\mathbf{w} = Proy_u(v)$. Determinar $\|w\|$.

Solución:

$$\begin{aligned} w &= Proy_u(v) \\ &= \frac{(u\cdot v)}{(u\cdot u)}u \\ &= \frac{12}{13}(2,3) \end{aligned}$$

Entonces

$$\|w\| = \frac{12}{13}\|(2,3)\| = \frac{12}{13}\sqrt{4+9} = \frac{12\sqrt{13}}{13}$$

4. Hallar la forma vectorial de la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa a través de $P = (-1,0,3)$ y que es perpendicular al plano de ecuación $x - 3y + 2z = 5$.
Solución:
La recta que buscamos debe pasar a través del punto $P = (-1,0,3)$ y debe ser

perpendicular al plano de ecuación general $x - 3y + 2z = 5$. Pero este plano tiene como vector normal a $\mathbf{n} = (1, -3, 2)$, por lo tanto la recta debe ser

$$l = P + t\mathbf{d},$$

es decir, deben ser los puntos

$$(x, y, z) = (-1, 0, 3) + t(1, -3, 2)$$

Tiempo: 60 minutos.