

Prueba Escrita Programada 1

Nombre: Nota:

Fecha: Lunes 18 de Mayo de 2015 Nota: 2 puntos cada ítem + 1 punto base Tiempo: 80 minutos

1. Considere la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} -a & a^2 & a & 1 \\ a^2 & a & 1 & -a \\ a & 1 & -a & a^2 \\ 1 & -a & a^2 & a \end{bmatrix}; a \in \mathbb{R}$$

- 1.1 Usando propiedades de los determinantes calcule el determinante de A.
 1.2 Demuestre que $A^2 = (1 + a^2)^2 \cdot I_4$ y luego deduzca A^{-1}

2. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z + 3w & = -4 \\ -x + 2y + 3z + w & = 3 \\ x + 5y - z + 4w & = -1 \\ 7x + 14y - 13z + 13w & = -13 \end{cases}$$

¿El sistema tiene solución? , en caso afirmativo, determínala (s)

3. Considere los vectores:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

¿Bajo qué condiciones para a y b , el vector v es combinación lineal del conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$?

PAUTA:

PREGUNTA 1

$$a) \begin{vmatrix} -a & a^2 & a & 1 \\ a^2 & a & 1 & -a \\ a & 1 & -a & a^2 \\ 1 & -a & a^2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a+a^3 & 1+a^2 \\ 0 & a+a^3 & 1-a^4 & -a-a^3 \\ 0 & 1+a^2 & -a-a^3 & 0 \\ 1 & -a & a^2 & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & a(a+a^2) & 1+a^2 \\ a(1+a^2) & (1-a^2)(1+a^2) & -a(1+a^2) \\ 1+a^2 & -a(1+a^2) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+a^2)^3 \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ a & (1-a^2) & -a \\ 1 & -a & 0 \end{vmatrix} = -(1+a^2)^3 (-1-a^2) = (1+a^2)^4$$

$$b) \begin{pmatrix} -a & a^2 & a & 1 \\ a^2 & a & 1 & -a \\ a & 1 & -a & a^2 \\ 1 & -a & a^2 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1+2a^2+a^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2a^2+a^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2a^2+a^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+2a^2+a^4 \end{pmatrix} =$$

$$= (1+2a^2+a^4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1+2a^2+a^4) I_4,$$

Como $A \left[\frac{1}{(1+a^2)^2} \cdot A \right] = I_4$ se deduce que: $A^{-1} = \frac{1}{(1+a^2)^2} A$

Observación:

- 1) Al primer determinante se le realizó las operaciones elementales $F_{43}(-a); F_{42}(-a^2); F_{41}(a)$ y se obtuvo el segundo determinante.
- 2) En el tercer determinante en la posición primera fila segunda columna debe decir: $a(1+a^2)$

PREGUNTA 2

Sea la matriz ampliada: $[A/b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 4 & -1 \\ 7 & 14 & -13 & 13 & -13 \end{array} \right)$

Calculando la matriz equivalente a $[A/b]$

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 4 & -1 \\ 7 & 14 & -13 & 13 & -13 \end{array} \right) F_{22}(2); F_{12}(1) \sim \\
 & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & 4 & -1 \\ 7 & 14 & -13 & 13 & -13 \end{array} \right) F_{33}(-2); F_{13}(1) \sim \\
 & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -2 & -5 & -2 \\ 7 & 14 & -13 & 13 & -13 \end{array} \right) F_{14}(\frac{-7}{2}) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 7/2 & 1 & 5/2 & 1 \end{array} \right) F_{23}(1) \\
 & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & 1 & 5/2 & 1 \end{array} \right) F_{24}(\frac{-1}{2}) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) F_{11}(\frac{1}{2}); F_{22}(\frac{1}{7}) \\
 & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3/2 & -2 & 3/2 & -2 \\ 0 & 1 & 2/7 & 5/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Los rangos son iguales y menor que el número de incógnitas, luego el sistema tiene infinitas soluciones.

Solución general:

$$x_2 = \frac{2}{7} - \frac{2}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_4 ;$$

$$x_1 = -2 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 - \frac{3}{2}x_4$$

$$x_1 = -\frac{17}{7} + \frac{17}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4 ; \text{ se asigna parámetros } x_3 = k_3 ; x_4 = k_4$$

$$S = \left\{ \left(-\frac{17}{7} + \frac{17}{7}k_3 - \frac{3}{7}k_4, \frac{2}{7} - \frac{2}{7}k_3 - \frac{5}{7}k_4, k_3, k_4 \right); k_3, k_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

PREGUNTA 3:

v es combinación lineal de los vectores v_1, v_2, v_3 si existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta + 2\gamma & \alpha + 2\gamma \\ \alpha + \beta + \gamma & 2\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta + 2\gamma &= 1 \\ \alpha + 2\gamma &= a \\ \alpha + \beta + \gamma &= b \\ 2\alpha + \beta &= 0 \end{cases}$$

Se forma la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) F_1 \leftrightarrow F_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) F_{13}(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 1 & -4 & -2a \end{array} \right) F_{23}(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & b-a-1 \\ 0 & 0 & -6 & -2a-1 \end{array} \right) F_{24}(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & b-a-1 \\ 0 & 0 & -6 & -2a-1 \end{array} \right) F_{34}(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & b-a-1 \\ 0 & 0 & 0 & -2b+1 \end{array} \right)$$

$$\text{Luego } -2b + 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

Para que v sea combinación lineal de los vectores v_1, v_2, v_3

debe ocurrir que $b = \frac{1}{2}$ y a un número real cualquiera.

