

CONTROL N°2 MATEMÁTICA III

Nombre:.....Nota:.....

Fecha: Viernes 24 Abril de 2015 Nota: 2 puntos cada pregunta + 1 punto base Tiempo: 90 minutos

1. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.1 Determine las condiciones de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la matriz A tenga rango 3

1.2 Determine la matriz inversa de A, si $a=b=0$

2. Demuestre que se cumple la igualdad: $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix} = (c-a)^2(d-b)^2$

3. El sistema de ecuaciones lineales no homogéneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 = 3 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$$

es compatible o incompatible? Fundamente su respuesta.

Pregunta 1: 1.1

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} F_2 \Leftrightarrow F_4 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b & 1 \end{bmatrix} F_{13}(-3) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3+a \\ 0 & 2 & b & 1 \end{bmatrix} F_{23}(-1) \\ F_{24}(-2) \\ \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3+a \\ 0 & 0 & b & 1 \end{bmatrix} \frac{-1}{3} F_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 - \frac{a}{3} \\ 0 & 0 & b & 1 \end{bmatrix} F_{34}(-b) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 - \frac{a}{3} \\ 0 & 0 & 0 & b + \frac{ab}{3} + 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $b + \frac{ab}{3} + 1 = 0$, es decir, $3b + ab = -3$.

En consecuencia, si a, b son números reales que satisfacen la relación $3b + ab = -3$,
 entonces la matriz A tiene rango 3

Pregunta 1: 1.2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} / \\ / \\ / \\ / \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} F_3 \Leftrightarrow F_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} / \\ / \\ / \\ / \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} F_{13}(-3) \\ F_2 \Leftrightarrow F_4 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} F_{23}(-2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} / \\ / \\ / \\ / \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} F_{23}(-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} / \\ / \\ / \\ / \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \frac{-1}{3} F_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} / \\ / \\ / \\ / \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/3 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} F_{31}(-1) \\ F_{43}(1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} / \\ / \\ / \\ / \end{array} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/3 & 1 & 1 & -5/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/3 & 1 & 1 & -5/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Pregunta 2:

:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix} \begin{matrix} F_{12}(-1) \\ F_{13}(-1) \\ F_{14}(-1) \end{matrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 0 & c-a & 0 & cb-ab \\ 0 & 0 & d-b & ad-ab \\ 0 & c-a & d-b & cd-ab \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_{24}(-1) \\ \end{matrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 0 & c-a & 0 & cb-ab \\ 0 & 0 & d-b & ad-ab \\ 0 & 0 & d-b & cd-cb \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_{34}(-1) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 0 & c-a & 0 & cb-ab \\ 0 & 0 & d-b & ad-ab \\ 0 & 0 & 0 & ab-ad+cd-cb \end{vmatrix} =$$

$$=(c-a)(d-b)[ab-ad+cd-cb]$$

$$=(c-a)(d-b)(d(c-a)+b(a-c))$$

$$=(c-a)(d-b)(d(c-a)-b(c-a))$$

$$=(c-a)(d-b)((c-a)(d-b))$$

$$=(c-a)^2(d-b)^2$$

Pregunta 3:

$$(A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & -1 & 6 & 3 \\ 6 & 1 & 4 & 22 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Como $\rho(A) = \text{Rango de } (A) = 2$ y $\rho(B) = \text{Rango de } (B) = 3$, El sistema es incompatible.

El rango de la matriz A es diferente al rango de la matriz ampliada, luego $AX=B$ es incompatible