UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

CÁLCULO
Segunda Versión

Integración y Series

Tomo II

Gladys Bobadilla A. y Rafael Labarca B.

Santiago de Chile
2004

Prefacio

El cero es el silencio antes del número
El número es el verbo matemático
Lo matemático es el cálculo de la realidad
La realidad es lo único increíble
Lo increíble es lo que no podemos
Y lo que no podemos es lo que queremos.
Patricio Manns.

Este texto es producto - en elaboración aún - del proyecto de desarrollo de la docencia **Texto de cálculo anual para ingeniería civil**, financiado por la Vicerrectoría de Docencia y Extensión de la Universidad de Santiago de Chile.

Gran parte de los contenidos de los capítulos 1 y 2 están sacados del antiguo texto de Cálculo I escrito por Gladys Bobadilla y Jorge Billeke (Q.E.P.D.).

La idea motriz de los autores para emprender esta tarea es el profundo convencimiento que ésta es una forma de contribuir a una cultura nacional independiente.

Aunque los temas tratados - generados en Europa entre los siglos 17 y 19 - forman parte del patrimonio universal y existe una amplia y variada literatura, no es una razón suficiente para que la universidad renuncie a crear su propio material docente. Esta labor es tan importante como la creación de nuevos conocimientos y necesita, como esta última, de una tradición para la cual se debe recorrer un largo camino de errores y rectificaciones.

Además, queremos compartir con los jóvenes estudiantes que usarán este libro, la reflexión del filósofo Gastón Bachelard (1884 - 1962) sobre lo que significa enfrentarse al conocimiento científico: "Frente al misterio de lo real el alma no puede, por decreto, tornarse ingenua. Es entonces imposible hacer, de golpe, tabla rasa de los conocimientos usuales. Frente a lo real, lo que cree saberse claramente ofusca lo que debiera saberse. Cuando se presenta ante la cultura científica, el espíritu jamás es joven. Hasta es muy viejo, pues tiene la edad de sus prejuicios. Tener acceso a la ciencia es rejuvenecerse espiritualmente, es aceptar una mutación brusca que ha de contradecir a un pasado."[1]

Agradecemos los valiosos comentarios de la Dra. Cecilia Yarur, la profesora Graciela Escalona y el señor Luis Riquelme que nos ayudaron a mejorar la presentación de este texto. Agradecemos además, el apoyo técnico en la escritura digital, de la señorita Evelyn Aguilar y el señor Leonelo Iturriaga.

Finalmente, siendo ésta una versión preliminar, agradeceremos a quienes detecten errores nos lo hagan saber.

Gladys Bobadilla A y Rafael Labarca B.
Santiago, marzo de 2002.

[1] Gastón Bachelard: La formación del espíritu científico. Ed. Siglo XXI, 1997.

Índice general

Capítulo 3

La integral de Riemann

3.1. Sumas de Riemann y el concepto de integral

Definición 3.1.1 Partición del intervalo Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, $a < b$. Una **partición de** $[a, b]$ es una familia finita $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de puntos tales que

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

Para cada partición $\mathcal{P} = \{t_0, t_1 \ldots, t_n\}$ tenemos que los intervalos $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2], \ldots,$ $[t_{n-1}, t_n]$ satisfacen:

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^{n} [t_{i-1},\, t_i]$$

Denotaremos por Δt_i la longitud del subintervalo $[t_{i-1},\, t_i]$, es decir:

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = \text{longitud del subintervalo i.}$$

En particular, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \ldots + \ldots = b - a = \text{longitud del intervalo } [a, b].$$

Se llama **norma de la partición** al número $||\mathcal{P}|| = \text{máx}\{\Delta t_i : i = 1, \ldots n\}$.

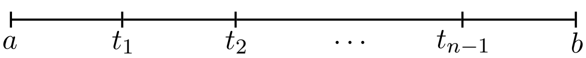


Figura 3.1: Partición del intervalo

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Sea $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$ se definen los números:

$$M_i = \sup\{f(x)\,;\ x \in [t_{i-1},\, t_i]\}$$
$$m_i = \inf\{f(x)\,;\ x \in [t_{i-1},\, t_i]\}$$

Es inmediato que $m_i \leq f(x) \leq M_i$, para todo $x \in [t_{i-1},\, t_i]$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definición 3.1.2 1. Se llama una **suma de Riemann** de f correspondiente a la partición $\mathcal{P}$ a cualquier número de la forma:

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), \quad \xi_i \in [t_{i-1},\, t_i].$$

2. Se llama **suma inferior** de f correspondiente a la partición $\mathcal{P}$ al número

$$I(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

3. Se llama **suma superior** de f correspondiente a la partición $\mathcal{P}$ al número

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Observación 3.1.3 Como f es acotada en $[a, b]$ entonces es acotada en cada $[t_{i-1},\, t_i]$ y luego tiene supremo e ínfimo en dicho intervalo. Si además, f es continua, el **Teorema de Weierstrass** 1.5.18, asegura que f alcanza su valor máximo y mínimo en cada intervalo $[t_{i-1},\, t_i]$.En particular si f es continua y creciente $m_i = f(t_{i-1})$ y $M_i = f(t_i)$.

$$\begin{aligned} I(f, \mathcal{P}) =& f(a)(t_1 - a) + f(t_1)(t_2 - t_1) + f(t_2)(t_3 - t_2) + f(t_3)(b - t_3) \\ =& \text{suma de las áreas} \end{aligned}$$

de las partes achuradas de la figura 3.2.,donde se toma f continua, creciente y positiva.

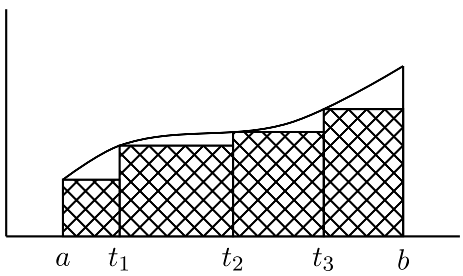


Figura 3.2: Sumas inferiores

$S(f, \mathcal{P}) = f(t_1)(t_1 - a) + f(t_2)(t_2 - t_1) + f(t_3)(t_3 - t_2) + f(b)(b - t_3) =$ suma de las áreas de las partes achuradas de la figura 3.3.

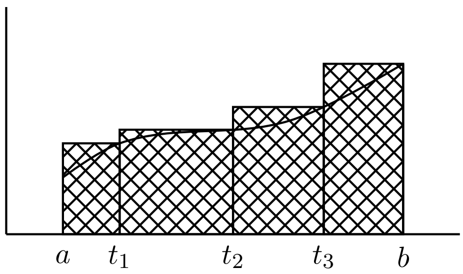


Figura 3.3: Sumas superiores

Observación 3.1.4 Es fácil verificar que $I(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P})$ para toda partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$(Ejercicio).

Definición 3.1.5 Una partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ se dice **más fina** o un **refinamiento** de la partición $\mathcal{P}'$ de $[a, b]$) si se cumple que todo punto de $\mathcal{P}'$ es punto de $\mathcal{P}$. En tal caso escribimos $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$.

Ejemplo 3.1.6 $\mathcal{P} = \{1, 1{,}2, 1{,}4, 1{,}6, 1{,}8, 2\}$ es una partición de $[1, 2]$ más fina que $\{1, 1{,}4, 2\}$.

Lema 3.1.7 *Sean $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ particiones de $[a, b]$ tales que $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada tenemos: $I(f, \mathcal{P}') \leq I(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}')$.*

Demostración: Suponemos que $\mathcal{P}' = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ y que $\mathcal{P} = \{t_0, \widetilde{t_0}, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$, es decir que $\mathcal{P}$ tiene un punto más que $\mathcal{P}'$.

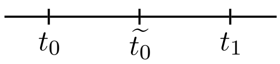


Figura 3.4:

En este caso

$$\begin{aligned}
I(f, \mathcal{P}') =& m_0(t_1 - t_0) + m_1(t_2 - t_1) + \ldots + m_{n-1}(t_n - t_{n-1}) \\
I(f, \mathcal{P}) =& \widetilde{m_0}(\widetilde{t_0} - t_0) + \widetilde{m_1}(t_1 - \widetilde{t_0}) + m_1(t_2 - t_1) + \ldots + m_{n-1}(t_n - t_{n-1}) \\
I(f, \mathcal{P}) - I(f, \mathcal{P}') =& \widetilde{m_0}(\widetilde{t_0} - t_0) + \widetilde{m_1}(t_1 - \widetilde{t_0}) - m_0(t_1 - t_0) = \\
=& (\widetilde{m_0} - m_0)(\widetilde{t_0} - t_0) + (\widetilde{m_1} - m_0)(t_1 - \widetilde{t_0})
\end{aligned}$$

Ya que $m_0 \leq \widetilde{m_0}$ y $m_0 \leq \widetilde{m_1}$ tenemos $I(f,\mathcal{P}') \leq I(f,\mathcal{P})$.

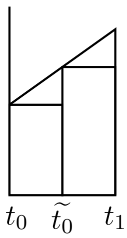


Figura 3.5.

Análogamente se prueban los otros resultados. ■

Lema 3.1.8 *Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son dos particiones cualesquiera de $[a,b]$ entonces se cumple que $I(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}')$.*

Demostración: Sea $\mathcal{P}'' = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$, de acuerdo al lema anterior tenemos

$$I(f,\mathcal{P}) \leq I(f,\mathcal{P}'') \leq S(f,\mathcal{P}'') \leq S(f,\mathcal{P})$$
$$I(f,\mathcal{P}') \leq I(f,\mathcal{P}'') \leq S(f,\mathcal{P}'') \leq S(f,\mathcal{P}')$$

Por lo tanto, $I(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}'') \leq S(f,\mathcal{P}')$ como queríamos probar. ■

Sea ahora $r_f = \{I(f,\mathcal{P})\,;\ \mathcal{P} \text{ es partición de } [a,b]\}$ el conjunto de todas las sumas inferiores asociadas a todas las posibles particiones de $[a\,,b]$. La proposición anterior garantiza que r_f es acotado superiormente y , por lo tanto, tiene supremo. Esto da sentido a la siguiente definición.

Definición 3.1.9 La **integral inferior** de f en $[a,b]$ es el número

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{I(f,\mathcal{P})\,;\ \mathcal{P} \text{ es partición de } [a,b]\}$$

Sea $R_f = \{S(f,\mathcal{P})\,;\ \mathcal{P} \text{ es partición de } [a,b]\}$. De acuerdo a la proposición anterior R_f es acotado inferiormente y , por lo tanto, tiene ínfimo. Esto da sentido a la siguiente definición.

Definición 3.1.10 La **integral superior** de f en $[a,b]$ es el número

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(f,\mathcal{P})\,;\ \mathcal{P} \text{ es partición de } [a,b]\}$$

Definición 3.1.11 Diremos que f es **integrable** en $[a, b]$ si se cumple que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

En este caso el valor común se denota por $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ y se llama **integral de Riemann de f sobre el intervalo** $[a, b]$.

Observación 3.1.12 Es inmediato que $\displaystyle\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Ejemplo 3.1.13 1. Sea f la función constante sobre $[a, b]$. Es decir, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$, para todo $x \in [a\,, b]$.

Sea $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición cualquiera de $[a, b]$. entonces tenemos que:

$$I(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}),$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Como $m_i = \inf\{f(x)\,;\ x \in [t_{i-1},\, t_i]\} = c$ y $M_i = \sup\{f(x)\,;\ x \in [t_{i-1},\, t_i]\} = c$.

Tenemos

$$I(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = c(t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + \ldots + t_n - t_{n-1}) = c(t_n - t_0) = c(b - a).$$

Análogamente tenemos que:

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = c(b - a).$$

De esta forma podemos concluir que:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = c(b - a) = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Por lo tanto, en virtud de la definición 3.1.11 tenemos que f es una función integrable y

$$\int_a^b f(x)dx = c(b - a).$$

2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Sea $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición cualquiera de $[a\,, b]$. Entonces, debido a la densidad de los números racionales e irracionales en $\mathbb{R}$ tenemos que:

$$m_i = \inf\{f(x)\,;\; x \in [t_{i-1},\, t_i]\,\} = 0$$
$$M_i = \sup\{f(x)\,;\; x \in [t_{i-1},\, t_i]\,\} = 1.$$

Luego,

$$I(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (t_i - t_{i-1}) = 0.$$
$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = t_n - t_0 = b - a.$$

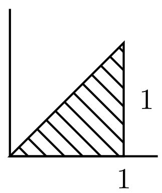
Por lo tanto,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup r_f = 0,$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf R_f = b - a.$$

Así, f no es integrable puesto que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = 0 \neq \overline{\int_a^b} f(x)dx = b - a.$$

3. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$.



Demostraremos que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

En efecto, sea $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[0,1]$ que divide el intervalo en n subintervalos de longitud igual a $\dfrac{1}{n}$. Por lo cual la partición es el conjunto $\left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \ldots, \dfrac{i}{n} \ldots, 1\right\}$. Es decir, $t_i = \dfrac{i}{n}$, con $1 \leq i \leq n$, y las sumas inferiores son:

$$I(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}), \text{ donde } m_i = \inf\left\{f(x)\,;\; x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right\}.$$

$$\begin{aligned} I(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n}(i-1) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\frac{n \cdot (n-1)}{2}\right) = \frac{n-1}{2n}. \end{aligned}$$

Las sumas superiores tienen la forma:

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n}(i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

Como

$$I(f,\mathcal{P}) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,\mathcal{P}),$$

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\frac{n-1}{2n} \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \frac{n+1}{2n}.$$

Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n}.$$

Es decir,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

como habíamos enunciado.

Criterio de Integrabilidad

Teorema 3.1.14 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de $[a,b]$ tal que $S(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - I(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$.

Demostración:

($\Longleftarrow$) Supongamos que la condición es cierta. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de $[a,b]$ tal que $S(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - I(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$.

Por lo cual,

$$\inf\{S(f,\mathcal{P})\,;\ \mathcal{P} \text{ es partición de } [a,b]\} < I(f,\mathcal{P}_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Usando la definición de integral superior podemos escribir:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx < I(f,\mathcal{P}_\varepsilon) + \varepsilon < \sup\{I(f,\mathcal{P})\,;\ \mathcal{P} \text{ es partición de } [a,b]\} + \varepsilon.$$

En virtud de la definición de la integral inferior, tenemos:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx < \underline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon.$$

Lo que implica que,

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon.$$

Como esta desigualdad se cumple para todo número positivo ε, podemos concluir que

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx,$$

lo que nos dice que f es integrable.

($\Longrightarrow$) Reciprocamente, si f es integrable, entonces

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = I.$$

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Usando la definición de integral superior, definición 3.1.10 o -lo que es equivalente- la caractización de ínfimo, tenemos que existe $\mathcal{P}'_\varepsilon$ tal que:

$$S(f,\mathcal{P}'_\varepsilon) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En virtud del lema 3.1.7, podemos escribir:

$$S(f,\mathcal{P}) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}\,, \text{para toda partición } \mathcal{P} \text{ más fina que } \mathcal{P}'_\varepsilon.$$

Análogamente, usando la definición de integral inferior, definición 3.1.9, o lo que es equivalente la definición de supremo, tenemos que existe

$\mathcal{P}''_\varepsilon$ tal que:

$$I(f,\mathcal{P}''_\varepsilon) > \underline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nuevamente, usando el lema 3.1.7, podemos escribir:

$$I(f,\mathcal{P}) > \underline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}\,, \text{para toda partición } \mathcal{P} \text{ más fima que } \mathcal{P}''_\varepsilon.$$

Si definimos $\mathcal{P}_\varepsilon = \mathcal{P}'{}_\varepsilon \cup \mathcal{P}''_\varepsilon$, tenemos que:

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{P}_\varepsilon) &< I + \frac{\varepsilon}{2} \\ -I(f,\mathcal{P}_\varepsilon) &< -I + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

sumando las dos desigualdades obtenemos,

$$S(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - I(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

■

Ejemplo 3.1.15 La función $f(x) = [x]$, la parte entera de x, satisface el criterio de integrabilidad en $[0,1]$ y por lo tanto es integrable en dicho intervalo.
En efecto

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Esta función tiene una discontinuidad en $[0,1]$. Sea $\mathcal{P}$ una partición cualquiera de $[0,1]$. $\mathcal{P} = \{x_0\,,\ x_1\,, \ldots\, x_n\,\}\,; x_0 = 0\,,\, x_n = 1$. Como la función es constante en $[0,1[$ e igual a cero, tenemos que:

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x)\,;\ x \in [x_{i-1},\, x_i]\} = 0, \quad i = 1, \ldots n. \\ M_i &= \sup\{f(x)\,;\ x \in [x_{i-1},\, x_i]\} = 0, \quad i = 1, \ldots n-1. \\ M_n &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I(f,\mathcal{P}) &= 0 \\ S(f,\mathcal{P}) &= 1\cdot(x_n - x_{n-1}) = \Delta x_n. \end{aligned}$$

Así tenemos,

$$0 \leq S(f,\mathcal{P}) - I(f,\mathcal{P}) = \Delta x_n.$$

Entonces, dado ε positivo, en virtud del Principio de Arquímedes existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$. Por otro parte, podemos construir una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de modo que $||\mathcal{P}_\varepsilon|| < \dfrac{1}{N}$.
Así, dado ε positivo hemos encontrado una partición de $[0,1]$, tal que

$$0 \leq S(f,\mathcal{P}) - I(f,\mathcal{P}) = \Delta x_n < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

¿Cuánto vale $\displaystyle\int_0^1 [x]dx$?
Como ya sabemos que la integral existe, podemos obtener su valor por el camino más fácil. En este caso usando la integral inferior cuyo valor es cero.

$$\int_0^1 [x]\,dx = 0.$$

Ejemplo 3.1.16 La función $f(x) = [x]$, la parte entera de x, satisface el criterio de integrabilidad en $[1,2]$ y por lo tanto es integrable en dicho intervalo.
En efecto

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si}\, 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si}\, x = 2. \end{cases}$$

Esta función tiene una discontinuidad en $[1,2]$. Sea $\mathcal{P}$ una partición cualquiera de $[1,2]$. $\mathcal{P} = \{x_0\,,\ x_1\,,\ldots x_n\}$; $x_0 = 1\,,\, x_n = 2$. Como la función es constante en $[1,2[$ e igual a uno, tenemos que:

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x)\,;\ x \in [x_{i-1}\,,\, x_i]\} = 1, \quad i = 1,\ldots n. \\ M_i &= \sup\{f(x)\,;\ x \in [x_{i-1}\,,\, x_i]\} = 1, \quad i = 1,\ldots n-1. \\ M_n &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
I(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1 \\
S(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} M_i \cdot \Delta x_i + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i + M_n \Delta x_n \\
&= (x_{n-1} - 1) + M_n \Delta x_n = x_{n-1} - 1 + 2(x_n - x_{n-1}) = (x_n - x_{n-1}) - 1 + 2 \\
&= \Delta x_n + 1.
\end{aligned}$$

Así tenemos,

$$0 \leq S(f,\mathcal{P}) - I(f,\mathcal{P}) = \Delta x_n + 1 - 1 = \Delta x_n.$$

Entonces, dado ε positivo, en virtud del Principio de Arquímedes existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$. Por otro parte, podemos construir una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de modo que $||\mathcal{P}_\varepsilon|| < \dfrac{1}{N}$. Así, dado ε positivo hemos encontrado una partición de $[0,1]$, tal que

$$0 \leq S(f,\mathcal{P}) - I(f,\mathcal{P}) = \Delta x_n < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

¿Cuánto vale $\displaystyle\int_1^2 [x]dx$?

como en el ejemplo anterior, dado que ya sabemos que la integral existe, podemos obtener su valor por el camino más fácil. En este caso usando la integral inferior cuyo valor es uno.

$$\int_1^2 [x]\, dx = 1.$$

3.1.1. Cálculo de integrales mediante sumas de Riemann particulares

Teorema 3.1.17 Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y $\mathcal{P}_n = \{t_i, t_i = a + \dfrac{b-a}{n} i, i = 0, \cdots, n\}$ entonces,

$$\lim_{n \to +\infty} s(f,\mathcal{P}_n) = \int_a^b f(x)dx.$$

Demostración:

S $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable, existen sus integrales superior e inferior:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{I(f,\mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ partición de } [a,b]\}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(f,\mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ partición de } [a,b]\}.$$

Además, se tiene la igualdad, $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Consideremos la partición $\mathcal{P}_n = \{t_i : \ t_i = a + \frac{b-a}{n} i; \qquad i = 0, 1, 2. \cdots n \qquad \}$.

Es inmediato que $\mathcal{P}_n$ divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $I_1^n, \cdots, I_n^n$ de igual longitud y se tiene que:

$$I_i^n = [t_{i-1}, t_i], \qquad i = 1, \cdots, n.$$

Sean $m_i^n = \inf\{f(x), x \in I_i^n\}$, $\qquad M_i^n = \sup\{f(x); x \in I_i^n\}$.

En este caso:

$$\begin{aligned} I(f, \mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^n m_i^n (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n m_i^n \cdot \frac{(b-a)}{n} \\ S(f, \mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^n M_i^n (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n M_i^n \frac{(b-a)}{n}. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} I(f, \mathcal{P}_n) &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n m_i^n = (b-a) \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i^n \\ S(f, \mathcal{P}_n) &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n M_i^n = (b-a) \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i^n. \end{aligned}$$

1. Es inmediato que $I(f, \mathcal{P}_n) \leq I(f, \mathcal{P}_{n+1})$.
   En efecto, si $I_j^{n+1} \subset I_j^n \cup I_{i+1}^n$ entonces, $m_j^{n+1} \geq max\{m_i^n, m_{i+1}^n\}$, en consecuencia

   $$\begin{aligned} & (b-a) \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} m_i^{n+1} \\ = \ & (b-a) \text{ promedio de } \{m_1^{n+1}, \cdots, m_i^{n+1}\} \geq (b-a) \text{ promedio de } \{m^n, \cdots, m_n^n\}. \end{aligned}$$

2. Usando el criterio de integrabilidad, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de $[a, b]$, tal que $0 \leq \underline{\int_u^b} f(x)dx - I(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$. Por el Principio de Arquímedes, dado el número $||\mathcal{P}_\varepsilon||$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

   $$\frac{1}{N} \leq ||\mathcal{P}_\varepsilon||.$$

Ahora, podemos construir una partición $\mathcal{P}_N$ que sea un refinamiento de tal $\mathcal{P}_\varepsilon$ y de modo que todos los subintervalos sean de longitud menor o igual que $\dfrac{1}{N}$.
Entonces, tenemos que para todo $n \geq N$, se cumple,

$$I(f, \mathcal{P}_\varepsilon) \leq I(f, \mathcal{P}_N) \leq S(f, \mathcal{P}_N) \leq S(f, \mathcal{P}_\varepsilon) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Así, $0 < \underline{\int_a^b} f(x) - S(f, \mathcal{P}_n) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx - S(f, \mathcal{P}_\varepsilon) \leq \varepsilon.$
Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} s(f, \mathcal{P}_n) = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \blacksquare$$

Ejemplo 3.1.18 Consideramos $f(x) = x^3, \qquad x \in [0, 1].$

En este caso, como f es creciente, $m_i = f\left(\frac{i-1}{n}\right) = \left(\dfrac{i-1}{n}\right)^3.$

$$I(f, \mathcal{P}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(i-1)}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^4} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i^3$$

$$= \frac{1}{n^4} \left(\frac{(n-1) \cdot n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2.$$

Así tenemos que:

$$\lim_{n\to+\infty} I(f, \mathcal{P}) = 1/4.$$

Ejemplo 3.1.19 La función $f(x) = x$ definida en $[a, b]$ es integrable y su integral

$$\int_a^b x\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

En efecto, demostraremos que $f(x) = x$ satisface el criterio de integrabilidad en cualquier intervalo $[a, b]$.
Dado un número positivo ε positivo, debemos encontrar una partición del intervalo $[a, b]$ tal que

$$S(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - I(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Sea $\mathcal{P}_n$ una partición cualquiera de $[a, b]$.
$\mathcal{P} = \{x_0\,,\ x_1\,, \ldots\, x_n\,\}\ ; x_0 = a\,,\ x_n = b$. Como la función identica es creciente en $[a, b[$,

tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} m_i & = & \inf\{f(x)\,;\ x\in[x_{i-1}\,,\,x_i]\} = x_{i-1}, \quad i=1,\ldots n. \\ M_i & = & \sup\{f(x)\,;\ x\in[x_{i-1}\,,\,x_i]\} = x_i, \quad i=1,\ldots n. \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} I(f,\mathcal{P}_n) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\cdot\Delta x_i \\ S(f,\mathcal{P}_n) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\Delta x_i. \end{array}$$

Con estos cálculos podemos escribir:

$$\begin{array}{rcl} 0\le S(f,\mathcal{P}_n)-I(f,\mathcal{P}_n) & = & x_1(x_1-a)+x_2(x_2-x_1)+\ldots\ldots+b(b-x_{n-1}) \\ & & -[a(x_1-a)+x_1(x_2-x_1)+\ldots\ldots+x_{n-1}(b-x_{n-1})] \\ & = & (x_1-a)(x_1-a)+(x_2-x_1)(x_2-x_1)+\ldots \\ & & \ldots+(b-x_{n-1})(b-x_{n-1}) \end{array}$$

Acotando uno de los factores en cada sumando por $||\mathcal{P}_n)||$, obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} 0\le S(f,\mathcal{P}_n)-I(f,\mathcal{P}_n) & \le & (x_1-a)||\mathcal{P}_n)||+(x_2-x_1)||\mathcal{P}_n)||+\ldots\ldots+(b-x_{n-1})||\mathcal{P}_n)|| \\ & = & [(x_1-a)+(x_2-x_1)+\ldots\ldots+(b-x_{n-1})]||\mathcal{P}_n)|| \\ & = & (b-a)||\mathcal{P}_n)||. \end{array}$$

Con el mismo razonamiento usado en los ejemplos anteriores, tenemos que: dado ε positivo, en virtud del Principio de Arquímedes existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{N(b-a)}<\varepsilon$. Por otro parte, podemos construir una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de modo que $||\mathcal{P}_\varepsilon||<\dfrac{1}{N(b-a)}$.
Así, dado ε positivo hemos encontrado una partición de $[0,1]$, tal que

$$0\le S(f,\mathcal{P})-I(f,\mathcal{P})=(b-a)||\mathcal{P}_\varepsilon)|<(b-a)\frac{1}{N(b-a)}<\varepsilon.$$

El criterio de integrabilidad nos dice que el número $\displaystyle\int_a^b x\,dx$ existe, pero no dice cuánto vale. Como sabemos que existe calcularemos la integral usando sumas de Riemann en que la función se evalua en el punto medio de cada subintervalo.

Sea $\mathcal{P}_n$ una partición cualquiera de $[a,b]$.
$\mathcal{P} = \{x_0\,,\ x_1\,,\ \ldots\ x_n\}\ ; x_0 = a\,,\ x_n = b,\ \ \xi_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}.$
entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i &= \frac{a+x_1}{2}(x_1-a) + \frac{x_1+x_2}{2}(x_2-x_1)\ldots\ldots + \frac{b+x_{n-1}}{2}(b-x_{n-1}) \\
&= \frac{(a-x_1)(a+x_1)}{2} + \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{2} + \ldots\ldots \frac{(b+x_{n-1})(b-x_{n-1})}{2} \\
&= \frac{1}{2}(x_1^2 - a^2 + x_2^2 - x_1^2 + \ldots\ldots + b^2 - x_{n-1}^2) \\
&= \frac{b^2-a^2}{2}.
\end{aligned}$$

Observemos que el último cálculo vale para cualquier partición. Como la función es continua y si $n \to +\infty$, entonces M_i y m_i tienden a confundirse con el punto medio de cada subintervalo, por lo cual podemos concluir que:

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

El siguiente teorema es una de las consecuencias más importantes del criterio de integrabilidad.

Teorema 3.1.20 Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua o continua a tramos entonces, f es integrable en el intervalo $[a,b]$.

Ejercicios resueltos

1. Recuerde que si la velocidad de una partícula es constante en un intervalo de tiempo, entonces se usa la fórmula $v = \dfrac{d}{t}$, donde d es la distancia recorrida y t el tiempo transcurrido.
   Esta fórmula no es válida cuando la velocidad varía en cada instante, pero si puede usarse para cálculos aproximados.
   Suponga que una partícula se mueve con velocidad $v(t) = t^2 + 1; t \in [0,1]$; t medido en horas.

   a) Dé un valor aproximado del camino recorrido durante una hora, suponiendo que cada 12 minutos la velocidad se mantiene constante e igual a $v(\xi_i)$ donde ξ_i es la mitad del tiempo transcurrido en cada intervalo de 12 minutos.

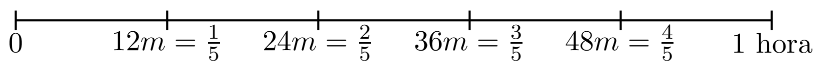
b) Observando el gráfico de la situación dada en a) ¿Cómo podría obtener un valor más exacto del camino recorrido?.

c) ¿Cómo podría obtener una fórmula para obtener el valor exacto?.

Solución:

a)

$$v(t) = t^2 + 1,\ t \in [0, 1].$$



Los puntos medios de cada subintervalo de 12 minutos son:
$\xi_1 = \dfrac{1}{10},\ \xi_2 = \dfrac{3}{10},\ \xi_3 = \dfrac{5}{10},\ \xi_4 = \dfrac{7}{10},\ \xi_5 = \dfrac{9}{10}.$
Como $v = \dfrac{d}{t}$, entonces $d = v \cdot t$.

- Si $0 \leq t \leq 1/5, \quad v = v_1 = v(\xi_1) = \left(\dfrac{1}{10}\right)^2 + 1$
- Si $1/5 < t \leq 2/5, \quad v = v_2 = v(\xi_2) = \left(\dfrac{3}{10}\right)^2 + 1$
- Si $2/5 < t \leq 3/5, \quad v = v_3 = v(\xi_3) = \left(\dfrac{5}{10}\right)^2 + 1$
- Si $3/5 < t \leq 4/5, \quad v = v_4 = v(\xi_4) = \left(\dfrac{7}{10}\right)^2 + 1$
- Si $4/5 < t \leq 5/5, \quad v = v_5 = v(\xi_5) = \left(\dfrac{9}{10}\right)^2 + 1$

Por lo tanto, en cada subintervalo i supondremos que la velocidad permanece constante e igual a v_i. Por lo tanto la distancia total d recorrida es:

$$\begin{aligned}
d &= d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = \frac{1}{5}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5) = \\
&= \frac{1}{5}\left[(\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 1 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + 1 + \left(\frac{5}{10}\right)^2 + 1 + \left(\frac{7}{10}\right)^2 + 1 + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + 1\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\frac{1^2}{10^2} + \frac{3^2}{10^2} + \frac{5^2}{10^2} + \frac{7^2}{10^2} + \frac{9^2}{10^2} + 5\right] = \frac{1}{5}\left[\frac{1 + 9 + 25 + 49 + 81}{100} + 5\right] \\
&= \frac{33}{100} + 1 = 1,33.
\end{aligned}$$

b) Un valor más exacto se obtiene haciendo una subdivisión más fina del intervalo $[0, 1]$.

c) Una forma de obtener el valor exacto es haciendo divisiones tan finas de modo que la longitud de los subintervalos tiendan a cero. en ese caso la cantidad de sumando se hace infinitamente grande, su suma se realiza con el concepto de integral de Riemann.

2. Si una fuerza constante F actúa sobre un cuerpo que se mueve en línea recta, entonces el trabajo T, realizado por la fuerza al desplazar el cuerpo una distancia x es $T = Fx$.

   Si la fuerza es variable, ésta fórmula ya no es válida, pero tal como en el ejercicio anterior, puede ser usada para encontrar valores aproximados del trabajo. Por ejemplo, para estirar un resorte en la dirección del eje X en x unidades de longitud, se necesita una fuerza

$$F(x) = 50x \;; \quad x \text{ medido en metros.}$$

   Dé un valor aproximado del trabajo total efectuado por la fuerza, para estirar el resorte 10 cm, usando una partición del intervalo en que varía x con n subdivisiones de igual longitud y suponiendo F constante en cada subintervalo. El valor de F en cada subintervalo puede ser elegido como usted quiera.

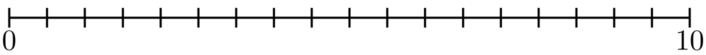
   Solución:

   $T = F \cdot x = T(x)$

   Si $F = F(x)$; $\quad T(x) = F(x) \cdot x$

   Aplicando esta fórmula a nivel microscópico, se obtiene:

$x_i = x_0 + 10\dfrac{i}{n}, \quad x_0 = 0, \quad i = 0, 1, \cdots, n$



Entre x_i y x_{i+1} la distancia es $\dfrac{1}{n}$.

En $x = x_{i+1}$, $\quad T(x_{i+1}) = F(x_{i+1}) \cdot \dfrac{1}{n}$.
El trabajo total es,

$$\begin{aligned} T(x_1) + T(x_2) + \cdots + T(x_n) &= (F(x_1) + F(x_2) + \cdots + F(x_n))\frac{1}{n} \\ &= 50(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\frac{1}{n} \\ &= 510 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{50}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n) \\ &= \frac{50}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 25 \cdot \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

Asì, el valor $25 \cdot \dfrac{n+1}{n}$ da un valor aproximado del trabajo total cuando el intervalo se divide en n subintervalos. Si la división de subintervalos es infinitamente grande, el valor del trabajo es:

$$\lim_{n \to +\infty} (T(x_1) + T(x_2) + \cdots + T(x_n)) = 25.$$

3. **Fórmula para calcular la longitud de una curva**
Considere $y = f(x)$, f función con derivada continua en $[a, b]$.
Particione el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[a, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, b]$.
Sea $P_i = (x_i, f(x_i))\, , i = 1, \cdots, n-1$, $\; P_0 = (a, f(a))$ y $P_n = (b, f(b))$.

   a) Calcule la longitud de la poligonal determinada por los trazos $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1, P_2}, \cdots, \overline{P_{n-1}P_n}$.

   b) Use el Teorema del Valor Medio para derivadas para reemplazar en la fórmula encontrada en (a) los términos $(y_i - y_{i-1})$.

c) Demuestre que la longitud L de la curva es aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\ (\Delta x_i)\,;\ c_i \in [x_{i-1}\,,\,x_i].$$

d) ¿A cuál suma de Riemann corresponde la expresión obtenida en (c).

e) Use el concepto de integral para escribir la expresión exacta de L.

f) Calcule un valor aproximado de la longitud de la curva

$$y = x^{3/2}$$

cuando $x \in [1,2]$ usando una partición de 10 subintervalos de igual longitud.

Solución:

a) $P_i = (x_i, y_i) = (x_i, f(x_i))$
$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$. entonces, la longitud L de la poligonal es:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}.$$

b) Como f es una función con derivada continua, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio para derivadas, 2.3.5, en cada subintervalo $[x_{i-1}\,,\,x_i]$. Así, tenemos la existencia de un punto $c_i\ \in]x_{i-1}\,,\,x_i[$ tal que $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$. Por esta razón podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\overline{P_{i-1}P_i} &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \\
&= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(c_i))^2 (x_i - x_{i-1})^2} \\
&= \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,|x_i - x_{i-1}|, \qquad x_{i-1} \le c_i \le x_i.
\end{aligned}$$

c) Por lo tanto, la longitud de la poligonal L puede escribirse como:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}(x_i - x_{i-1}).$$

d) Si consideramos a la poligonal L como una aproximación de la longitud de la curva $y = f(x)$, entonces:

Longitud de la curva $\approx \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\ (\Delta x_i)$;

donde $c_i \in [x_{i-1}\,,\, x_i]$. La expresión obtenida en (c) corresponde a a una suma de Riemann de la función $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$.

e) El valor exacto de la longitud de la curva se obtiene haciendo la partición del dominio de la función cada vez más fino, por lo cual usando la definición de integral podemos escribir:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

f) $f(x) = x^{3/2}, \quad f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{1/2}, \quad x_i = 1 + \dfrac{i}{10}; \quad 0 \leq i \leq 10.$
Así, tenemos:

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1 + 1/10,\ x_2 = 1 + 2/10,\ \cdots, x_{10} = 2.$$

$(f'(x_i))^2 = \dfrac{3}{2}(x_i)^{1/2}, i = 1, 2, \cdots, 10.$
Para encontrar un valor aproximado de la longitud de la curva tomaremos como valor de g en cada subintervalo g evaluada en el extremo derecho del subintervalo.

$$\begin{aligned}
l_c &\approx \frac{3}{2}(x_1)^{1/2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{3}{2}(x_2)^{1/2} \cdot \frac{1}{10} + \cdots + \frac{3}{2}(x_9)^{1/2}\frac{1}{10} + \frac{3}{2}(x_{10}^{1/2}) \cdot \frac{1}{10} \\
&\approx \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{10}\Big[(x_1)^{1/2} + (x_2)^{1/2} + (x_3)^{1/2} + (x_4)^{1/2} + (x_5)^{1/2} + (x_6)^{1/2} + (x_7)^{1/2} + \\
&\quad (x_8)^{1/2} + (x_9)^{1/2} + (x_{10})^{1/2}\Big) \\
&\approx \frac{3}{20}\Big[\sqrt{1,1} + \sqrt{1,2} + \sqrt{1,3} + \sqrt{1,4} + \sqrt{1,5} + \sqrt{1,6} + \sqrt{1,7} + \\
&\quad \sqrt{1,8} + \sqrt{1,9} + \sqrt{2}\Big] \\
&\approx \frac{3}{20}[1,048 + 1,095 + 1,140 + 1,183 + 1,224 + 1,264 + 1,303 + 1,341 + \\
&\quad 1,378 + 1,414] \\
&\approx 1,8585.
\end{aligned}$$

4. Dada la parábola $y = x^2$ sobre $[0, 2]$

a) Dé un valor aproximado del área A de la región del plano comprendida entre el eje X, la curva $y(x)$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$, usando la suma de Riemann correspondiente a una partición de 5 subintervalos de igual longitud y usando como ξ_i el punto medio de cada subintervalo.

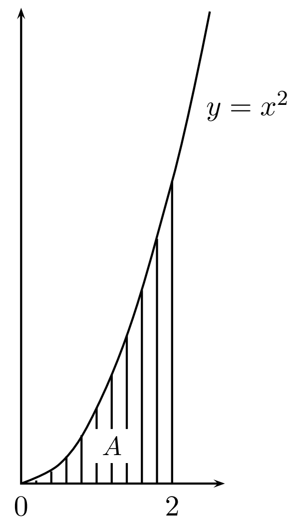
b) Aproxime el área A mediante la suma de los trapecios que resultan usando la misma partición del item anterior.

c) La suma resultante en el item anterior , ¿ es una suma de Riemann ? Justifique.

d) Calcule la suma superior correspondiente a una partición de n subintervalos iguales.

e) Calcule la integral superior de la función y sobre $[0, 2]$ y diga por qué este valor corresponde al valor de la integral.

Solución: $y = x^2, x \in [0, 2]$



a) Si dividimos el intervalo de longitud 2 en 5 partes iguales cada subintervalo debe tener una longitud de $\frac{2}{5} = 0,4$ unidades de longitud. Por lo tanto,$x_0 = 0$, $\quad x_1 = \frac{2}{5}$, $\quad x_2 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$, $\quad x_3 = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$, $\quad x_4 = \frac{6}{5} + \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$, $\quad x_5 = \frac{8}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$.
$\xi_1 = \frac{1}{5}, \quad \xi_2 = \frac{3}{5}, \quad \xi_3 = 1, \quad \xi_4 = \frac{7}{5}, \quad \xi_5 = \frac{9}{5}$.
Ahora, calculamos los valores de f en cada ξ_i:

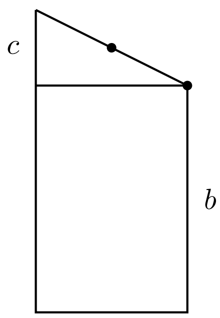
$$f(\xi_1) = \frac{1}{25}, \quad f(\xi_2) = \frac{9}{25}, \quad f(\xi_3) = 1, \quad f(\xi_4) = \frac{49}{25}, \quad f(\xi_5) = \frac{91}{25}.$$

Entonces, la suma de Riemann S correspondiente a la partición $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

y los puntos ξ_i es un valor aproximado del área A.

$$\begin{aligned} A &\approx S=\sum_{i=1}^{5} y(\xi_1)\Delta x_i=\frac{1}{25}\cdot\frac{2}{5}+\frac{9}{25}\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{2}{5}+\frac{49}{25}\cdot\frac{2}{5}+\frac{81}{25}\cdot\frac{2}{5} \\ &\frac{2}{5}\left(\frac{1+9+25+49+81}{25}\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{165}{25}=\frac{2}{5}\cdot\frac{33}{5}=\frac{66}{25} \\ &2,64. \end{aligned}$$

$b)$ Área de un trapecio:



$$A_T=a\cdot b+\frac{a\cdot c}{2}=\frac{2a\cdot b+ac}{2}=\frac{a\cdot b+(b+c)\cdot a}{2}=\frac{a\cdot[b+(b+c)]}{2}.$$

1^er^ trapecio: $a=\dfrac{2}{5},\quad b=0,\quad b+c=\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{4}{25};\quad A_{T_1}=\dfrac{\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{4}{25}}{2}=\dfrac{4}{125}$

2^do^ trapecio: $a=\dfrac{2}{5}, b=\left(\dfrac{2}{5}\right)^2, b+c=\left(\dfrac{4}{5}\right)^2;\quad A_{T_2}=\dfrac{\dfrac{2}{5}\cdot\left(\dfrac{4}{25}+\dfrac{16}{25}\right)}{2}$

3^er^ trapecio: $a=\dfrac{2}{5}, b=\left(\dfrac{4}{5}\right)^2, b+c=\left(\dfrac{6}{5}\right)^2;\quad A_{T_3}=\dfrac{\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{16}{25}+\dfrac{16}{25}\right)}{2}$

4^to^ trapecio: $a=\dfrac{2}{5}, b=\left(\dfrac{6}{5}\right)^2, b+c=\left(\dfrac{8}{5}\right)^2;\quad A_{T_4}=\dfrac{\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{36}{25}+\dfrac{64}{25}\right)}{2}$

5^to^ trapecio: $a=\dfrac{2}{5}, b=\left(\dfrac{8}{5}\right)^2, b+c=2^2;\quad A_{T_5}=\dfrac{\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{64}{25}+4\right)}{2}$

Area $\approx \dfrac{4}{125} + \dfrac{20}{125} + \dfrac{52}{125} + \dfrac{100}{125} + \dfrac{164}{125} = \dfrac{340}{125} = \dfrac{68}{25} = 2,72.$

c) Cada sumando de la suma del item anterior es de la forma:

$$A_{T_i} = a_i \cdot \frac{b_i + (b_i + c_i)}{2}.$$

La base de cada trapecio es $a_i = \Delta x_i$. Para que dicha suma sea una suma de Riemann, el número $\dfrac{b_i + (b_i + c_i)}{2}$ debe corresponder a la imagen de algún $\overline{x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$. Es decir, $f(\overline{x_i}) = \dfrac{b_i + (b_i + c_i)}{2}$.
Como f es continua en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y $f([x_{i-1}, x_i]) = [b_i, b_i + c_i]$, podemos aplicar el Teorema del Valor Intermedio, teorema 1.5.16 para obtener la existencia de $\overline{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $f(\overline{x_i}) = \dfrac{b_i + (b_i + c_i)}{2}$. Por lo tanto, la suma de las áreas de los trapecios cuyas alturas son puntos sobre el gráfico de una curva continua es una suma de Riemann.

d) Sea $\Delta x_i = \dfrac{2}{n}$. Así, obtenemos los puntos de la partición $\mathcal{P}_n$:
$x_i = \dfrac{2}{n} \cdot i$; con $i = 0, 1, \cdots n$.
$x_0 = 0, x_1 = \dfrac{2}{n}, \quad x_2 = \dfrac{4}{n}, \quad x_3 = \dfrac{6}{n}, \cdots, x_{n-1} = \dfrac{2(n-1)}{n}, \quad x_n = 2.$
Si $i = 0, 1, \ldots, n-1$ entonces, considerando que la función f es creciente $M_i = f(x_i = \dfrac{4}{n^2} \cdot (i)^2$.
Por lo tanto,

$$f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(x_i) \cdot \Delta x_i = \frac{4}{n^2} \cdot (i)^2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3}(i)^2.$$

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{8}{n^3}(i)^2 \\ &= \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i)^2 \\ &= \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{8}{n^2} \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} = \frac{4}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

e) La integral superior de la función y sobre $[0,2]$ corresponde al ínfimo de todas las posibles sumas superiores. Este ínfimo se alcanza haciendo tender n a $+\infty$ en $S(f,\mathcal{P}_n)=\frac{4}{3}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$, puesto que esta sucesión es decreciente.

$$\lim_{n\to+\infty} S(f,\mathcal{P}_n)=\frac{4}{3}\cdot 2=\frac{8}{3}=2,666....$$

Este valor corresponde al valor de la integral porque la función es continua y por lo tanto integrable.

5. Dada la función $f(x)=x(x+2)$, $\quad a\leq x\leq 2a \quad$, $a>0$, calcule $\displaystyle\int_a^{2a} f(x)dx$ como límite de sumas de Riemann.

Solución: Consideremos la partición del intervalo $[a,2a]$ obtenida al subdividir el intervalo en n subintervalos iguales de longitud $\dfrac{a}{n}$. Entonces cada subintervalo I_i tiene la forma:

$$I_i=\left[a+a\cdot\frac{i-1}{n}\,,\,a+a\cdot\frac{i}{n}\right[, i=1,\cdots,n.$$

$$\begin{aligned}
f\left(a+a\cdot\frac{i}{n}\right) &= \left(a+a\cdot\frac{i}{n}\right)\left(a+a\cdot\frac{i}{n}+2\right)\\
f\left(a+a\cdot\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{a}{n} &= \left(a+a\cdot\frac{i}{n}\right)\left(a+a\cdot\frac{i}{n}+2\right)\frac{a}{n}=\\
&= \left(a^2+a^2\frac{i}{n}+2a+\frac{i}{n}a^2+a^2\frac{i^2}{n^2}+2a\frac{i}{n}\right)\frac{a}{n}\\
&= \frac{a^3}{n}+a^3\frac{i}{n^2}+\frac{2a^2}{n}+a^3\frac{i}{n^2}+\frac{a^3\cdot i^2}{n^3}+\frac{2a^2}{n^2}i\\
&= \frac{a^3}{n}+2a^3\cdot\frac{i}{n^2}+a^3\frac{i^2}{n^3}+\frac{2a^2}{n^2}i+\frac{2a^2}{n}\\
\sum_{i=1}^{n} f\left(a+a\frac{i}{n}\right)\frac{a}{n} &= a^3+a^3\frac{n+1}{n}+\frac{a^3}{6}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}+a^2\left(\frac{n+1}{n}\right)+2a^2\\
\lim_{n\to+\infty} S_n &= a^3+a^3+\frac{a^3}{6}+a^2+2a^2=\frac{13a^3}{6}+3a^2.
\end{aligned}$$

6. Sea $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

   a) Diga por qué la integral I existe.

   b) Dé un valor aproximado de I subdividendo el intervalo de integración en 10 subintervalos de igual longitud:

   1) Calculando la respectiva suma superior.
   2) Calculando la respectiva suma inferior.
   3) Usando la suma de las áreas de los trapecios determinados por la partición elegida.
   4) Usando los puntos medios de cada subintevalo.

   c) Use consideraciones geométricas para decir, cuando sea posible, si los valores encontrados en cada caso son mayores o menores que el valor exacto.

Solución:

a) La integral existe porque $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en $[1, 2]$, como consecuencia del teorema 3.1.20.

b) consideremos una partición del intervalo $[a, b]$ dividiéndola en n partes de igual longitud. Tenemos, $a = 1$, $b = 2$ $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{n}$, $x_i = a + (b-a) \cdot \dfrac{i}{n} = 1 + \dfrac{i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + \dfrac{1}{n}, \quad x_2 = 1 + \dfrac{2}{n}, \cdots, \quad x_{n-1} = 1 + \dfrac{n-1}{n}, \quad x_n = 2.$
Si $n = 10$, tenemos:
$x_0 = 1, \quad x_1 = \dfrac{11}{10}, \quad x_2 = \dfrac{12}{10}, \quad x_3 = \dfrac{13}{10}, \quad \cdots, \quad x_9 = \dfrac{19}{10}, \quad x_{10} = 2.$

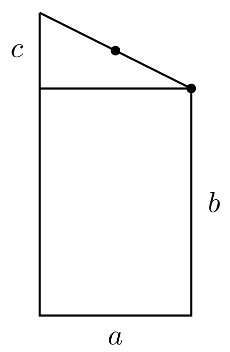
1) Considerando que la función es decreciente, la suma superior queda expresada como sigue:

$$\begin{aligned}
S(f, \mathcal{P}_{10}) &= \frac{1}{10} \cdot f(1) + \frac{1}{10} f\left(\frac{11}{10}\right) + \frac{1}{10} \cdot f\left(\frac{12}{10}\right) + \cdots + \frac{1}{10} \cdot f\left(\frac{19}{10}\right) \\
&= \frac{1}{10}\left[1 + \frac{10}{11} + \frac{10}{12} + \frac{10}{13} + \cdots + \frac{10}{19}\right] \\
&= \frac{1}{10}[1 + 0,909 + 0,833 + 0,769 + 0,714 + 0,666 + 0,625 \\
&\quad +0,588 + 0,555 + 0,526] \\
&= \frac{1}{10} \cdot 7,185 \approx 0,7185.
\end{aligned}$$

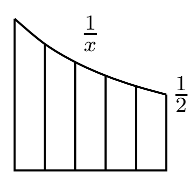
2) La suma inferior tiene la forma:

$$\begin{aligned} I(f,\mathcal{P}_{10}) &= \frac{1}{10}\left[f\left(\frac{11}{10}\right)+f\left(\frac{12}{10}\right)+\cdots f(2)\right] \\ &= \frac{1}{10}\left[\frac{10}{11}+\frac{10}{12}+\cdots+\frac{10}{19}+\frac{10}{20}\right] \\ &= \frac{1}{10}\cdot 6,685 \approx 0,6685. \end{aligned}$$

3) Ahora calcularemos un valor aproximado de la integral usando las áreas de los trapecios determinados por la partición elegida. Recordemos que el área de un trapecio es el producto de la base por la semi suma de las alturas.



Trapecio: $ab+\dfrac{ac}{2}=\dfrac{(2b+c)a}{2}=\dfrac{a\cdot[b+(b+c)]}{2}$.



Entonces,como todos los trapecios tiene base de longitud $\dfrac{1}{10}$, tenemos que esta suma de Riemann tiene la forma:

$$
\begin{aligned}
s(f,\mathcal{P}_{10}) &= \frac{1}{10}\left[\frac{f\left(\frac{11}{10}\right)+f(1)}{2}+\frac{f\left(\frac{11}{10}\right)+f\left(\frac{12}{10}\right)}{2}\right. \\
&\quad \left.+\frac{f\left(\frac{12}{10}\right)+f\left(\frac{13}{10}\right)}{2}+\cdots+\frac{f(2)+f\left(\frac{19}{10}\right)}{2}\right] \\
&= \frac{1}{10}\left[\frac{\frac{10}{11}+1}{2}+\frac{\frac{10}{11}+\frac{10}{12}}{2}+\frac{\frac{10}{12}+\frac{10}{13}}{2}+\frac{\frac{10}{13}+\frac{10}{14}}{2}\right. \\
&\quad +\frac{\frac{10}{14}+\frac{10}{15}}{2}+\frac{\frac{10}{15}+\frac{10}{16}}{2}+\frac{\frac{10}{16}+\frac{10}{17}}{2}+\frac{\frac{10}{17}+\frac{10}{18}}{2}+ \\
&\quad \left.\frac{\frac{10}{18}+\frac{10}{19}}{2}+\frac{\frac{10}{19}+\frac{1}{2}}{2}+\right] \\
&= \frac{1}{10}\left[\frac{0,909+1}{2}+\frac{0,909+0,833}{2}+\frac{0,833+0,769}{2}+\frac{0,769+0,714}{2}+\right. \\
&\quad \frac{0,714+0,666}{2}+\frac{0,666+0,625}{2} \\
&\quad \left.+\frac{0,625+0,588}{2}+\frac{0,588+0,555}{2}+\frac{0,555+0,526}{2}+\frac{0,526+0,5}{2}\right] \\
&= \frac{1}{10}[0,9545+0,871+0,801+0,7415+0,690+ \\
&\quad 0,6455+0,6065+0,5715+0,5405+0,513] \\
&= \frac{1}{10}\cdot 6,9350 \approx 0,6935.
\end{aligned}
$$

4) Usando puntos medios, tenemos:

$$
\begin{array}{llllll}
\overline{x}_0 & = \dfrac{1+\dfrac{11}{10}}{2} & = \dfrac{21}{20}, & \overline{x}_1 & = \dfrac{\dfrac{11}{10}+\dfrac{12}{10}}{2} & = \dfrac{23}{20} \\
\overline{x}_2 & = \dfrac{\dfrac{12}{10}+\dfrac{13}{10}}{2} & = \dfrac{25}{20}, & \overline{x}_3 & = \dfrac{\dfrac{13}{10}+\dfrac{14}{10}}{2} & = \dfrac{27}{20}, \\
\overline{x}_4 & = \dfrac{\dfrac{14}{10}+\dfrac{15}{10}}{2} & = \dfrac{29}{20}, & \overline{x}_5 & = \dfrac{\dfrac{15}{10}+\dfrac{16}{10}}{2} & = \dfrac{31}{20}, \\
\overline{x}_6 & = \dfrac{\dfrac{16}{10}+\dfrac{17}{10}}{2} & = \dfrac{33}{20}, & \overline{x}_7 & = \dfrac{\dfrac{17}{10}+\dfrac{18}{10}}{2} & = \dfrac{35}{20}, \\
\overline{x}_8 & = \dfrac{\dfrac{18}{10}+\dfrac{19}{10}}{2} & = \dfrac{37}{20}, & \overline{x}_9 & = \dfrac{\dfrac{19}{10}+\dfrac{1}{2}}{2} & = \dfrac{39}{20}.
\end{array}
$$

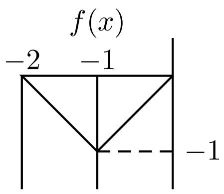
Así, la suma de Riemann respectiva es:

$$
\begin{aligned}
s(f,\mathcal{P}_{10}) &= \frac{1}{10}\left[f\left(\frac{21}{20}\right)+f\left(\frac{23}{20}\right)+f\left(\frac{25}{20}\right)+\cdots+f\left(\frac{39}{20}\right)\right] \\
&= \frac{1}{10}\left[\frac{20}{21}+\frac{20}{23}+\frac{20}{25}+\frac{20}{27}+\frac{20}{29}+\frac{20}{31}+\frac{20}{33}+\frac{20}{35}+\frac{20}{37}+\frac{20}{39}\right] \\
&= \frac{1}{10}[0,952+0,869+0,8+0,740+0,689+ \\
&\quad 0,645+0,606+0,571+0,540+0,512] \\
&= \frac{1}{10}[6,924] \approx 0,6924.
\end{aligned}
$$

c)
- La suma superior es siempre mayor que la integral, por lo tanto el valor obtenido por esta vía es una aproximación por exceso.
- La suma inferior es siempre menor que el valor de la integral, por lo cual esta aproximación es una por defecto.
- La suma de las áreas de los trapecios puede ser, en general mayor o menor que el valor exacto.En este caso particular, debido a las propiedad de convexidad tenemos que esta aproximación es mayor que el valor exacto.

  en efecto: la función $\dfrac{1}{x}$ es convexa, por lo cual la recta que une los puntos $\left(x_{i-1}, \dfrac{1}{x_{i-1}}\right)$ y $\left(x_i, \dfrac{1}{x_i}\right)$ está sobre la curva en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Por lo tanto, el área de los trapecios es mayor que el área sobre la curva.
- Veamos ahora la cuarta aproximación. Al usar los puntos medios para evualuar la función en la respectiva suma de Riemann y teniendo en cuenta

que la función es estrictamente decreciente y positiva, podemos deducir que el área que queda sin evaluar, es decir que está sobre el rectángulo de altura $f(\overline{x_i})$ con $x \in [x_{i-1}\,,\, \overline{x_i}]$ es mayor que él área considerada en el rectángulo cuando $x \in [\overline{x_i}\,,\, x_i]$



7. *a*) Use que $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ y la fórmula que convierte $\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2$ en producto para demostrar que
$$|\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2| \leq |x_1 - x_2|.$$

   b) Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ definida en $[a, b]$ y $\mathcal{P}_n$ una partición de $[a, b]$ que divide este intervalo en n partes iguales. Demuestre que
$$0 \leq S(f, \mathcal{P}_n) - I(f, \mathcal{P}_n) \leq \frac{(b-a)^2}{n},$$
   donde $S(f, \mathcal{P}_n)$ es una suma superior de f con respecto a $\mathcal{P}_n$ y $I(f, \mathcal{P}_n)$ es una suma inferior de f con respecto a $\mathcal{P}_n$.

   c) Use el criterio de integrabilidad para demostrar que $f(x)$ es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$.

   d) Deduzca que $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$.

   e) Deduzca que $\cos x$ es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$.

Solución:

a) Usaremos $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ y la conocida fórmula trigonométrica:
$$\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2 = 2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \operatorname{sen} \frac{x_1 - x_2}{2}.$$
entonces,

$$\begin{aligned}
|\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2| &\leq 2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\operatorname{sen}\frac{x_1-x_2}{2}\right| \\
&\leq 2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\left|\operatorname{sen}\frac{x_1-x_2}{2}\right| \\
&\leq 2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right| \\
&\leq |x_1-x_2|, \qquad \text{pues } |\cos\alpha| \leq 1.
\end{aligned}$$

b) Sea $x_i = a + (b-a)\cdot\dfrac{i}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots n$.
Así, $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$.

$$\begin{aligned}
S(f,\mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}).M_i = (b-a)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}M_i \\
I(P_r, f) &= \sum_{i=0}^{n-1}(x_i - x_{i-1}).m_i = (b-a)\sum_{i\equiv 0}^{n-1}\frac{1}{n}m_i
\end{aligned}$$

Denotemos por:

$$M_i = \operatorname{sen}(x_i^{**}), \quad m_i = \operatorname{sen}(x_i^{*}).$$

Para toda partición $\mathcal{P}_n$:

$$\begin{aligned}
S(f,\mathcal{P}_n) - I(f,\mathcal{P}_n) &= (b-a)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(M_i - m_i) \\
&= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|(\operatorname{sen}(x_i^{**}) - \operatorname{sen}(x_i^{*})\right| \\
&\leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i^{**} - x_i^{*}| \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - x_{i-1}| \\
&\leq \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{n=1}^{n}\frac{b-a}{n} = \frac{(b-a)^2}{n}.
\end{aligned}$$

c) De acuerdo a (b) dado $\varepsilon > 0$, en virtud del Principio de Arquímedes podemos escoger n tal que $\dfrac{(b-a)^2}{n} < \varepsilon$ y entonces existe una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ de modo que se cumpla:

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - I(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

d) Como $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ es continua por ser compuesta de dos funciones continuas es integrable.

e) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} x = \cos x$
Esto es, $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ es integrable.

8. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ x & \text{si} \quad x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

a) Demuestre que la suma inferior de cualquier partición de $[0,1]$ vale cero.

b) Calcule $\displaystyle\underline{\int_0^1} f(x)\, dx$.

c) Demuestre que toda suma superior $S(f, \mathcal{P}_n)$, donde $\mathcal{P}_n = \{0, x_1, \ldots, \ldots, x_n\}$ es una partición cualquiera de $[0,1]$, puede escribirse como:

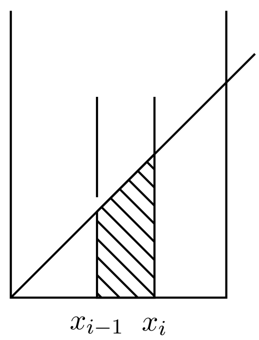
$$S(f, \mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(\Delta x_i)^2.$$

d) Observe que, $(x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i)\Delta x_i$ es el área del trapecio de base Δx_i y de alturas x_{i-1} y x_i, y deduzca que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i)\Delta x_i = \frac{1}{2}.$$

e) Demuestre que $f(x)$ no es integrable.

Solución:



a) Sea $\mathcal{P}$ una partición cualquiera $\mathcal{P} = \{x_0 = 0 < \cdots < x_n = 1\}$

$$I(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}).m_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \cdot 0 = 0.$$

Luego, para toda partición $\mathcal{P}$, tenemos $I(f,\mathcal{P}) = 0$.

b) $\underline{\int_0^1} f(x)dx = 0$, por definición de integral inferior.

c) $S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}).M_i$; donde $M_i = x_i$.

Como $(x_i - x_{i-1}).x_i = x_i^2 - x_i x_{i-1}$, entonces:

$$\begin{aligned}(x_i - x_{i-1}) \cdot x_i = &= \frac{x_i^2}{2} + \frac{x_i^2}{2} - x_i x_{i-1} - \frac{x_{i-1}^2}{2} + \frac{x_{i-1}^2}{2} = \\ &= \frac{x_i^2}{2} - \frac{x_{i-1}^2}{2} + \frac{x_i^2}{2} - x_i x_{i-1} + \frac{x_{i-1}^2}{2} \\ &= \frac{(x_i + x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})^2.\end{aligned}$$

Usando que $\left(x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i\right) = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, se tiene que: $(x_i - x_{i-1}) \cdot x_i = (x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i)\Delta x_i + \frac{1}{2} \cdot \Delta x_i^2$.

Así, $S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i\right) \cdot \Delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2$, para toda partición $\mathcal{P}$.

d) $\left(x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i\right) = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$.

$\left(x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i\right) \cdot \Delta x_i =$ área del trapecio de alturas x_i, x_{i-1} y base Δx_i.

Así, $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i\right)\Delta x_i =$ área del tríangulo rectángulo de lado l $= \frac{1}{2}$.

Por tanto, para toda partición $\mathcal{P}$ tenemos que $S(f,\mathcal{P}) \geq \frac{1}{2}$.

e) Como $I(P,f) = 0$, usando el criterio de integrabilidad, podemos concluir que f no es integrable, ya que $S(f,\mathcal{P}) \geq \frac{1}{2}$. Como se vio en el item anterior.

9. Usando que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}\right)=\frac{1}{k+1}; \quad k\in\mathbb{N}.$$

Si $a>0, k\in\mathbb{N}$, calcular

$$\int_0^a x^k dx$$

Solución: La función $f(x)=x^k$ es continua, por lo tanto existe $\displaystyle\int_0^a x^k dx$.

Para calcularla tomaremos límites de sumas de Riemann inferiores con particiones que dividen el intervalo $[0,a]$ en n partes iguales.

Sea $\mathcal{P}_n=\{x_0,x_1,\cdot,\cdots,x_n\}$, donde:

$$\begin{array}{lcl} x_0 & = & 0,\ x_1=\frac{a}{n}, x_2=\frac{2a}{n},\cdots,x_n=\frac{na}{n}=a \\ \xi_i & = & x_{i-1} \\ \Delta x_i & = & \frac{a}{n} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} I(f,\mathcal{P}_n) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{(i-1)a}{n}\right)\frac{a}{n} \\ & = & 0\cdot\frac{a}{n}+\left(\frac{a}{n}\right)^k\cdot\frac{a}{n}+\left(\frac{2a}{n}\right)^k\frac{a}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}a\right)^k\frac{a}{n} \\ & = & \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}\left[1+2^k+\cdot+(n-1)^k\right] \end{array}$$

Usando el límite dado:

$$\lim_{n\to\infty} I(f,\mathcal{P}_n)=\frac{a^{k+1}}{k+1}$$

En consecuencia,

$$\boxed{\int_a^a x^k dx=\frac{a^{k+1}}{k+1}; \quad a>0}$$

10. Calcular $\displaystyle\int_{-a}^{0} x^k dx$ usando el mismo método del ejercicio 9.

Solución:

$$\Delta x_i = \frac{a}{n}; \xi_i = x_i$$

$$x_0 = -a, \quad x_1 = -\frac{(n-1)}{a}a, \cdots\cdots, x_{n-2} = -\frac{2a}{n}; \quad x_{n-1} = -\frac{a}{n}, x_n = 0$$

$$\begin{aligned}
I(f,\mathcal{P}_n) &= 0\cdot\frac{a}{n} + \left(\frac{-a}{n}\right)^k \frac{a}{n} + \left(\frac{-2a}{n}\right)^k \cdot \frac{a}{n} + \cdots + \left(-\frac{(n-1)a}{n}\right)^k \cdot \frac{a}{n} \\
&= \frac{(-a)^k \cdot a}{n^{k+1}}\left[1 + 2^k + \cdots + (n-1)^k\right] \\
&= -\frac{(-a)^{k+1}}{n^{k+1}}\left[1 + 2^k + \cdots + (n-1)^k\right] \\
\lim_{n\to\infty} I(f,\mathcal{P}_n) &= -\frac{(-a)^{k+1}}{k+1} \text{ Por lo tanto:} \\
\int_{-a}^{0} x^k dx &= -\frac{(-a)^{k+1}}{k+1} \\
\int_{c}^{0} x^k dx &= -\frac{c^{k+1}}{k+1}; \quad c < 0
\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

1. Generalice el resultado de los ejemplos 3.1.15 y 3.1.16 demostrando que la función parte entera satisface el criterio de integrabilidad sobre cada subintervalo $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$ y que $\displaystyle\int_{k}^{k+1} [x]\, dx = k$.

2. Use el criterio de integrabilidad para averiguar cuales de las siguientes funciones son integrables y calcule $\int f$ cuando exista.

   a) $f(x) = [x]$ en $[0, 1]$.

   b) $f(x) = [x]$ en $[-2, 1]$.

c) $f(x) = x - [x]$ en $[-1, 1]$.

d) $f(x) = |x|$ en $[-1, 1]$.

e) $f(x) = x + 1$ en $[-3, 0]$.

f) $f(x) = x^3$ en $[0, 2]$.

g) $f(x) = x^3$ en $[-2, 0]$.

h) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}$

3. *a*) Grafique la curva $x^2 + y^2 = 1$.

   b) Grafique la función $y = \sqrt{1 - x^2}$.

   c) Use la interpretación geométrica de la integral para calcular

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$$

4. Dada

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si} \quad x \in [-2, -1] \\ x & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \end{cases}$$

Calcule las sumas de Riemann para particiones que dividan el intervalo en $2n$ subintervalos de igual longitud. Calcule la integral de f en $[-2, 0]$

3.2. Propiedades de la Integral de Riemann

Teorema 3.2.1 Si f y g son funciones integrables en $[a,b]$, entonces se cumplen las siguientes propiedades de la integral de Riemann:

1. $f+g$ es integrable y $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces αf es integrable y $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$

3. Si f es integrable y no negativa en $[a,b]$, entonces:
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

4. Si f y g son funciones integrables en $[a,b]$ y si $f(x) \leq g(x)$ para cada x en $[a,b]$, entonces
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

5. Si f es integrable en $[a,b]$ y si $m \leq f(x) \leq M$ para cada $x \in [a,b]$, entonces
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

6. **Partición del intervalo de integración**
Si $a,b,c \in \mathbb{R}$ son tales que $a < c < b$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, entonces
f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ y
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Demostración:

1. Como f y g son integrables, $f+g$ es una función acotada y dado $\varepsilon > 0$ existe partición $\mathcal{P}_\varepsilon(f)$ tal que
$$S(f,\mathcal{P}_\varepsilon(f)) - s(f,\mathcal{P}_\varepsilon(f)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Como g es integrable dado $\varepsilon > 0$ existe partición $\mathcal{P}_\varepsilon(g)$ tal que
$$S(g,\mathcal{P}_\varepsilon(g)) - s(g,\mathcal{P}_\varepsilon(g)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\varepsilon(f) \cup \mathcal{P}_\varepsilon(g)$, entonces

$$S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}_\varepsilon(f)) - s(f,\mathcal{P}_\varepsilon(f)) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$S(g,\mathcal{P}) - s(g,\mathcal{P}) \leq S(g,\mathcal{P}_\varepsilon(g)) - s(g,\mathcal{P}_\varepsilon(g)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Escribamos $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ y sean

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x)\,;\ x \in [t_{i-1}, t_i]\}\,, \\ m_i' &= \inf\{g(x)\,;\ x \in [t_{i-1}, t_i]\}\,, \\ m_i'' &= \inf\{f(x)+g(x)\,;\ x \in [t_{i-1}, t_i]\} \end{aligned}$$

y sean $M_i\,, M_i'\,, M_i''$ los respectivos supremos. Como
$m_i \leq f(x)$ y $m_i' \leq g(x)$, entonces

$$m_i + m_i' \leq f(x) + g(x).$$

Luego $m_i + m_i' \leq m_i''$.

Análogamente se verifica que
$M_i + M_i' \geq M_i''$.
Por otro lado,

$$\begin{aligned} S(f+g,\mathcal{P}) - s(f+g,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} M_i''(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i''(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(M_i + M_i')(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=0}^{n-1}(m_i - m_i')(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n}(M_i' - m_i')(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq [S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P})] + S((g,\mathcal{P}) - s(g,\mathcal{P})) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que $f+g$ es una función integrable. Veamos ahora que

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

En efecto, como $m_i + m_i' \leq m_i''$, se tiene

$$s(f,\mathcal{P}) + s(g,\mathcal{P}) \leq s(f+g,\mathcal{P})$$

y como $M_i'' \leq M_i + M_i'$, se tiene

$$S(f+g,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}) + S(g,\mathcal{P}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x)dx - \left[\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\right] &\leq S(f+g,\mathcal{P}) - (s(f,\mathcal{P}) + s(g,\mathcal{P}))\\ &\leq S(f,\mathcal{P}) + S(g,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) - s(g,\mathcal{P})\\ &\leq S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) + S(g,\mathcal{P}) - s(g,\mathcal{P})\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2. Se deja como ejercicio.

3. Si $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$, entonces todas las sumas superiores e inferiores relativas a cualquier partición son positivas. Como f es integrable, su integral

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ particion de } [a,b]\ \} \geq 0.$$

4. Esta propiedad es consecuencia de la propiedad 3.
Si $f(x) \geq g(x)$ entonces, $f(x) - g(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$.

Aplicando 3 y 1 tenemos, $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0,$
consecuentemente, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$

5. Es una consecuencia directa de la propiedad 4, usando $g(x) = M$ y $h(x) = m$ en $[a,b]$. entonces, tenemos que

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x).$$

En virtud de la propiedad mencionada obtenemos:

$$\int_a^b h(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

De donde se deduce la propiedad requerida.

6. (⇒) Supongamos que f es integrable en $[a,b]$. Debemos demostrar que f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$.

Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ existe partición $\mathcal{P}_\varepsilon = \{t_0, t_1 \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ tal que

$$S(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - s(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$$

Suponemos que $c \in \mathcal{P}_\varepsilon$, es decir $c = t_j$ para algún $j = 1,\ldots,n-1$.
Sean $\mathcal{P}_1 = \{t_0,\ldots,t_j\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{t_j,\ldots,t_n\}$, se tiene que $\mathcal{P}_1$ es partición de $[a,c]$ y $\mathcal{P}_2$ es una partición de $[c,b]$, entonces

$$s(f,\mathcal{P}_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{j-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=j}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = s_{\mathcal{P}_1} + s_{\mathcal{P}_2}$$

Análogamente $S(f,\mathcal{P}_\varepsilon) = S(f,\mathcal{P}_1) + S(f,\mathcal{P}_2)$, luego

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - s(f,\mathcal{P}_\varepsilon) =& [S(f,\mathcal{P}_1) + S(f,\mathcal{P}_2)) - [(s(f,\mathcal{P}_1) + s(f,\mathcal{P}_2))] \\ &= [S(f,\mathcal{P}_1) - s(f,\mathcal{P}_1)] + [S(f,\mathcal{P}_2) - s(f,\mathcal{P}_2)] < \varepsilon \end{aligned}$$

Así, si $c \in \mathcal{P}_\varepsilon$, entonces existen particiones $\mathcal{P}_{1,\varepsilon}(f)$, $\mathcal{P}_{2,\varepsilon}(f)$ tal que $S(f,\mathcal{P}_{1,\varepsilon)} - s(f,\mathcal{P}_{1,\varepsilon)} < \varepsilon$ en $[a,c]$ y $S(f,\mathcal{P}_{2,\varepsilon}) - s(f,\mathcal{P}_{2,\varepsilon}) < \varepsilon$ en $[c,b]$.
Supongamos que $c \notin \mathcal{P}_\varepsilon$, entonces existe j tal que $t_{j-1} < c < t_j$. Sea $\mathcal{P}'_\varepsilon = \mathcal{P}_\varepsilon \cup \{c\} = \{t_0, t_1, t_{j-1}, c, t_j, \ldots, t_n\}$, claro que $\mathcal{P}'_\varepsilon$ es mas fina que $\mathcal{P}_\varepsilon$ y luego

$$s(f,\mathcal{P}_\varepsilon) \leq s(f,\mathcal{P}'_\varepsilon) \leq S(f,\mathcal{P}'_\varepsilon) \leq S(f,\mathcal{P}_\varepsilon)$$

y entonces $S(f,\mathcal{P}'_\varepsilon) - s(f,\mathcal{P}'_\varepsilon) \leq S(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - s(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$.
Por lo tanto,

$$S(f,\mathcal{P}'_\varepsilon) - s(f,\mathcal{P}'_\varepsilon) < \varepsilon$$

Procedemos ahora como en el caso anterior pues $c \in \mathcal{P}'_\varepsilon$.Por lo tanto, f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$ ya que para todo $\varepsilon > 0$ hemos conseguido partición $\mathcal{P}_1$ de $[a,c]$ y $\mathcal{P}_2$ de $[c,b]$ tales que

$$S(f,\mathcal{P}_1) - s(f,\mathcal{P}_1) < \varepsilon \text{ y } S(f,\mathcal{P}_2) - s(f,\mathcal{P}_2) < \varepsilon.$$

De la demostración anterior se desprende que

$$s(f,\mathcal{P}) \leq s(f,\mathcal{P}') = s(f,\mathcal{P}_1) + s(f,\mathcal{P}_2) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

para cualquier partición $\mathcal{P}$. Por lo tanto,

$$\sup\{s(f,\mathcal{P})\} \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

así que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

También $S(f,\mathcal{P}') \leq S(f,\mathcal{P})$, es decir

$$S(f,\mathcal{P}_1) + S(f,\mathcal{P}_2) \leq S(f,\mathcal{P})$$

y luego $\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq S(f,\mathcal{P})$, así que $\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

($\Leftarrow$) Ahora nuestra hipótesis es f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ y debemos demostrar que f es integrable en $[a,b]$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P}_1$ partición de $[a,c]$ tal que

$$S(f,\mathcal{P}_1) - s(f,\mathcal{P}_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

y existe partición $\mathcal{P}_2$ de $[c,b]$ tal que

$$S(f,\mathcal{P}_2) - s(f,\mathcal{P}_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, claro que $\mathcal{P}$ es partición de $[a,b]$ y

$$S(f,\mathcal{P}) = S(f,\mathcal{P}_1) + S(f,\mathcal{P}_2),$$
$$s_{\mathcal{P}}(f) = s(f,\mathcal{P}_1) + s(f,\mathcal{P}_2)$$

Por lo tanto, $S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) = S(f,\mathcal{P}_1) - s(f,\mathcal{P}_1) + S(f,\mathcal{P}_2) - s(f,\mathcal{P}_2) \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P}$ partición de $[a,b]$ tal que

$$S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \varepsilon,$$

entonces f es integrable en $[a,b]$.

Al igual que antes concluimos qu,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \blacksquare$$

Teorema 3.2.2 1. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces $|f|$ es integrable en $[a, b]$.

2. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces $f^2 = f \cdot f$ es integrable en $[a, b]$.

3. Si f y g son integrables en $[a, b]$ entonces $f \cdot g$ es integrable en $[a, b]$.

Demostración:

1. Se deja de ejercicio.

2. Se deja de ejercicio.

3. $$(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2f \cdot g,$$

   implica
   $$f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}.$$

   Por teoremas 3.2.1 y 3.2.2 podemos concluir que el producto de funciones integrables es integrable. ■

El teorema del Valor Medio para integrales

Este importante teorema da respuesta a la pregunta : ¿Es posible calcular el valor promedio de una función sabiendo que, en general, ella tiene una cantidad infinitamente grande de valores diferentes? Consideremos una función continua $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Si dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de longitud $\triangle x = (b-a)/n$ y elegimos los puntos $x_1, \ldots x_n$ en los intervalos sucesivos y calculamos el promedio aritmético entre los números $f(x_1), \ldots f(x_n)$, tenemos:

$$\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

De la ecuación $\triangle x = (b-a)/n$, obtenemos que $n = (b-a)/\triangle x$. Entonces, la expresión anterior la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{\frac{b-a}{\triangle x}} &= \frac{\triangle x[f(x_1) + \ldots + f(x_n)]}{b-a} \\
&= \frac{1}{b-a}[f(x_1)\triangle x + \ldots + f(x_n)\triangle x] \\
&= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\triangle x
\end{aligned}$$

Si aumentamos la cantidad de subintervalos, podemos calcular el valor promedio de una gran cantidad de valores de f, pero siempre una cantidad finita.Para pasar a una cantidad infinitamente grande que cubra todos los valores de f, debemos usar el concepto de lìmite y obtenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\triangle x &= \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\triangle x \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

Utilizando la definición de la integral de Riemann.Esto nos permite definir el **valor promedio** de f en el intervalo [a,b] como :

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Así, hemos logrado contestar la pregunta inicial, pero ahora surge otra inquietud: ¿existirá algún número c tal que la función evaluada en ese número sea igual al valor promedio de la función, es decir, $f(c) = \overline{f}$? el siguiente teorema responde a tal inquietud.

Teorema 3.2.3 Teorema del Valor Medio para integrales
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Al número $f(c)$ se le llama **valor promedio o medio de** f **en** $[a,b]$.

Demostración:
Como f es continua en el intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, el teorema de Weiersstras asegura que ella alcanza su valor máximo M y su valor mínimo m. así, tenemos que:

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Usando la propiedad 5 del teorema 3.2.1, tenemos que:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Lo que implica que,

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Como la funciòn f es continua, el Teorema del Valor Intermadio asegura que su recorrido es $[m, M]$, por lo tanto el número $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ es elemento del recorrido de f. Es decir, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \ \blacksquare$$

Definición 3.2.4 Si f es una función integrable sobre el intervalo $[a, b]$, $a \leq b$, entonces se define el número

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Observación 3.2.5 Como consecuencia de la def 3.2.4 haciendo $a = b$, obtenemos:

$$\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx,$$

por lo tanto,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Ejercicios resueltos

1. Use los ejercicios resueltos 9 y 10 de la sección 3.1, para demostrar que:

$$\int_a^b x^k dx = \frac{1}{k+1}\left(b^{k+1} - a^{k+1}\right); \quad a < b$$

Solución: Caso $1 : 0 < a < b$.

$$\begin{aligned} \int_0^b x^k dx &= \int_0^a x^k dx + \int_a^b x^k dx; \qquad \text{usando propiedad 6.} \\ \frac{b^{k+1}}{k+1} &= \frac{a^{k+1}}{k+1} + \int_a^b x^k dx \\ \text{lo que implica que: } \int_a^b x^k dx &= \frac{b^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{k+1} \end{aligned}$$

Caso 2: $a < b < 0$

$$\begin{aligned}
\int_a^0 x^k dx &= \int_a^b x^k dx + \int_b^0 x^k dx; \qquad \text{(usando propiedad 6.)}\\
-\frac{a^{k+1}}{k+1} &= \int_a^b x^k dx - \frac{b^{k+1}}{k+1}. \quad \text{Por lo tanto, se obtiene la fórmula buscada.}
\end{aligned}$$

Caso 3: $a < 0 < b$

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^k dx &= \int_a^0 x^k dx + \int_0^b x^k dx; \qquad \text{usando propiedad 6.}\\
&= -\frac{a^{k+1}}{k+1} + \frac{b^{k+1}}{k+1}
\end{aligned}$$

En general, tenemos que:

$$\boxed{\int_a^b x^k dx = \frac{1}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1}) \quad ; \quad a < b}$$

2. Deduzca que el valor absoluto de las integrales de seno y coseno son positivas y están acotadas por la longitud del intervalo de integración.

   Solución: Las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son continuas, por lo tanto integrables en cualquier intervalo cerrado y acotado. Como $|\operatorname{sen} x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$, usando la propiedad de acotamiento de la integral, propiedad 5, se tiene que:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left| \int_a^b \operatorname{sen} x dx \right| \leq (b-a)\\
0 &\leq \left| \int_a^b \cos x dx \right| \leq (b-a), \quad a \leq b.
\end{aligned}$$

3. Demuestre que:

   a) $0 \leq \left| \int_a^b \arctan x dx \right| \leq \frac{\pi}{2}(b-a), \quad a \leq b.$

   b) $\frac{1}{4} \leq \int_3^4 \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{3}$

Solución:

a) $f(x) = \arctan x$ es continua por lo tanto su integral existe en cualquier intervalo $[a, b]$. Además

$$|f(x)| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto,

$$0 \leq \left| \int_a^b \arctan x dx \right| \leq \frac{\pi}{2}(b - a)$$

b) $3 < x < 4$, implica que $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{3}$. Por lo tanto,

$$\int_3^4 \frac{dx}{4} \leq \int_3^4 \frac{dx}{x} \leq \int_3^4 \frac{dx}{3}.$$

Es decir: $\boxed{\dfrac{1}{4} \leq \displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x}\, dx \leq \frac{1}{3}}$

4. Verifique, sin calcular la integral, que:

$$\frac{3}{8} \leq \int_0^3 \frac{1}{x+5} \leq \frac{3}{5}$$

Solución: Sea $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$, $x \in [0, 3]$. entonces se tiene,

$$f'(x) = -\left(\frac{1}{x+5}\right)^2 < 0, \; x \in [0, 3].$$

Así, tenemos que f es decreciente.

f es decreciente $[0, 3]$. Como $f(0) = 1/5, f(3) = \dfrac{1}{8}$, tenemos que

$$\frac{1}{8} \leq f(x) \leq \frac{1}{5}, \text{ para todo } x \in [0, 3].$$

Luego, en virtud de la propiedad 4 concluimos que

$$\frac{1}{8} \cdot 3 \leq \int_0^3 \frac{dx}{x+5} \leq \frac{3}{5}.$$

5. Verifique que el valor promedio de la función $f(x) = x$ en $[a, b]$ es el punto medio del intervalo.

   Solución: Según el teorema del valor medio para integrales, teorema 3.2.3, el valor promedio de f en $[a, b]$ es

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

   Usando el valor de la integral, según ejemplo 1, tenemos:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big]_a^b = \frac{1}{2}\frac{1}{b-a}(b^2-a^2) = \frac{a+b}{2} = \text{ punto medio de } [a,b].$$

6. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una función derivable y tal que

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

   a) Aplique a cada integral por separado el Teorema del Valor Medio para integrales y deduzca que existen u y $v \in [-1, 1]$ tal que $-1 < u < 0 < v < 1$ y $f(u) = f(v)$.

   b) Aplique el Teorema de Rolle para demostrar que existe $c \in [-1, 1]$ tal que $f'(c) = 0$.

   Solución:

   a) Existe $u \in [-1, 0]$ tal que $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)dx = f(u)(0-(-1)) = f(u)$.

   Existe $v \in [0, 1]$ tal que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = f(v)(1-0) = f(v)$.

   Como $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx$ implica que $f(u) = f(v)$.

   b) Aplicando el teorema de rolle en el intervalo $I = [u, v]$, tenemos la existencia de un número $c \in [u, v]$ tal que :

$$f'(c) = \frac{f(v) - f(u}{v-u} = 0.$$

7. Justifique por qué la integral $\displaystyle\int_a^b [x]\, dx$, existe a pesar que la función es discontinua. ¿Cuántas discontinuidades tiene? ¿Cuál es el valor de la integral?

Solución: La función parte entera es discontinua en los números enteros. Así, tenemos que los únicos puntos de discontinuidad de $[x]$ están localizados en los enteros contenidos en el intervalo $[a,b]$, los que constituyen una cantidad finita de discontinuidades, por lo tanto, podemoa aplicar el teorema 3.1.20.
Sean $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ los puntos de discontinuidad de f en $[a,b]$. En cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ el valor de la integral es x_i, ver ejercicio propuesto 1 de la sección 3.1. Así, el valor de la integral sobre $[a,b]$ es:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_1}[x]\,dx + \int_{x_1}^{x_2}[x]\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n}[x]\,dx + \int_{x_n}^{b}[x]\,dx \\ &= (x_1-1)(x_1-a) + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n(b-x_n).\end{aligned}$$

8. Calcular las siguientes integrales señalando claramente las propiedades usadas:
$\displaystyle\int_0^5 [x]dx,\ \int_{2,3}^{6,1}[x]\,dx \quad ; \quad \int_{-4,7}^{3,4}[x]\,dx.$

Solución:

a) Usando la propiedad de partición del intervalo de integración y el ejercicio 7, tenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^5 [x]dx &= \int_0^1 [x]dx + \int_1^2 [x]dx + \int_2^3 +[x]dx \int_3^4 [x]dx + \int_4^5 [x]dx \\ &= 0+1+2+3+4 = 10.\end{aligned}$$

b) Usando la propiedad de partición del intervalo de integración y el ejercicio 7, tenemos:

$$\begin{aligned}\int_{2,3}^{6,1}[x]dx &= \int_{2,3}^{3} 2\,dx + \int_3^4 3\,dx + \int_4^5 4\,dx + \int_5^6 5\,dx + \int_6^{6,1} 6\,dx \\ &= 2\cdot 0,7 + 3 + 4 + 5 + 6\cdot 0,1 = 12 + 2 = 14.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-4,7}^{3,4}[x]dx &= \int_{-4,7}^{-4}(-5)\,dx + \int_{-4}^{-3} -4\,dx + \int_{-3}^{-2}(-3)\,dx + \int_{-2}^{-1}(-2)\,dx + \int_{-1}^{0}(-1)\,dx + \\ &+ \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 1\,dx + \int_2^3 2\,dx + \int_3^{3,4} 3\,dx = \\ &= -5(0,7) - 4\cdot -3 - 2 - 1 + 1 + 2 + 3\cdot 0,4 \\ &= -7 - 3,5 + 1,2 = -9,3.\end{aligned}$$

9. Demuestre que dos funciones integrables que difieren en un punto tienen la misma integral sobre un mismo intervalo.
Solución: Sean f, g funciones integrables en $[a, b]$ tales que $f = g$ en $[a, b] - \{c\}$ y $f(c) \neq g(c)$.
Sea $h = f - g$, entonces
$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x \in [a, b], x \neq c \\ h(c) \neq 0 & \end{cases}$

- h es integrable por las propiedad 1 y 2.
- Si $h(c) > 0$, calculamos la integral mediante su integral inferior y obtenemos que
$\displaystyle\int_a^b h(x)dx = 0.$
- Si $h(c) < 0$, calculamos la integral usando la integral superior y obtenemos que
$\displaystyle\int_a^b h(x)dx = 0.$
Entonces,
$$\int_a^b h(x)dx = 0 = \int_0^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = 0.$$
Por lo tanto,
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Entonces por ejemplo:

$\displaystyle\int_{1,7}^2 [x]dx = 1(2 - 1{,}7) = 0{,}3$; pues en $[1{,}7\,,\,2]$ la función $[x]$ es igual a 1 excepto en $x = 2$.

10. Encuentre una fórmula general para la integral de un polinomio.

Solución: Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado n. Por ser una función continua sobre $\mathbb{R}$, es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$. Para calcular su integral usaremos el teorema 3.2.1 y el ejercicio resuelto **??** de esta misma sección.

$$\begin{aligned}
\int_a^b p(x)\,dx &= \int_a^b (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0)\,dx \\
&= \int_a^b a_n x^n\,dx + \int_a^b a_{n-1}x^{n-1}\,dx + \cdots + \int_a^b a_1 x\,dx + \int_a^b a_0\,dx \\
&= a_n \int_a^b x^n\,dx + a_{n-1}\int_a^b x^{n-1}\,dx + \cdots + a_1\int_a^b x\,dx + a_0\int_a^b dx \\
&= a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b + a_{n-1}\frac{x^n}{n}\Big|_a^b + \ldots + a_1\frac{x^2}{2}\Big|_a^b + a_0 x\Big|_a^b \\
&= \frac{a_n}{n+1}\Big(b^{n+1} - a^{n+1}\Big) + \frac{a_{n-1}}{n1}\Big(b^n - a^n\Big) + \ldots + \frac{a_1}{2}(b^2 - a^2) + a(b-a).
\end{aligned}$$

11. Si $\overline{f}$[a,b] representa el valor promedio de f en el intervalo [a,b] y $a < c < b$, demostrar que

$$\overline{f}[a,b] = \frac{c-a}{b-a}\overline{f}[a,c] + \frac{b-c}{b-a}\overline{f}[c,b].$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\overline{f}[a,b] &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx, && \text{Definición valor promedio de una función continua} \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\right], && \text{Prop.Integral de } f \text{ continua} \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^c f(x)dx + \frac{1}{b-a}\int_c^b f(x)dx \\
&= \frac{c-a}{(c-a)(b-a)}\int_a^c f(x)dx + \frac{b-c}{(b-c)(b-a)}\int_c^b f(x)dx \\
&= \frac{c-a}{b-a}\cdot\frac{1}{c-a}\int_a^c f(x)dx + \frac{b-c}{b-a}\cdot\frac{1}{b-c}\int_c^b f(x)dx \\
&= \frac{c-a}{b-a}\overline{f}[a,c] + \frac{b-c}{b-a}\overline{f}[c,b].
\end{aligned}$$

12. Si f es continua y $\int_1^3 f(x)dx = 8$, demuestre que f alcanza el valor 4, cuando menos una vez, en el intervalo [1,3].

Solución:

Como f es continua, utilicemos el Teorema del Valor Medio:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= f(c)(b-a) \\
\int_1^3 f(x)dx &= f(c)\cdot 2 \\
8 &= f(c)\cdot 2 \\
\Rightarrow f(c) &= 4.
\end{aligned}$$

Esto nos indica que existe, por lo menos, un punto c en [1,3] tal que la función f en ese punto alcanza el valor 4.

Nota: Es fácil comprobar que el valor promedio de la función f es 4. Luego tenemos que:

$$\overline{f} = f(c) = 4.$$

Ejercicios propuestos

1. Analice la existencia de
$$\int_{-2}^{0} (x^2 - 3[x] + 8x^3)dx$$

2. *a*) Calcule explícitamente la función $g(x) = [x^2]$, en $[-1\,,\,1]$.
   b) Deduzca que g es integrable en $[-1\,,\,1]$.
   c) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$.

3. *a*) Calcule explícitamente la función $g(x) = [x^3]$, en $[-1\,,\,1]$.
   b) Deduzca que g es integrable en $[-1\,,\,1]$.
   c) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$.

4. *a*) Calcule explícitamente la función $g(x) = [\operatorname{sen} x]$, en $[-2\pi\,,\,2\pi]$.
   b) Deduzca que g es integrable en $[-2\pi\,,\,2\pi]$.
   c) Calcule $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} g(x)\,dx$.

5. *a*) Calcule explícitamente la función $g(x) = [\cos x]$, en $[-2\pi\,,\,2\pi]$.

b) Deduzca que g es integrable en $[-2\pi\,,\,2\pi]$.

c) Calcule $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} g(x)\,dx$.

6. *a*) Calcule explícitamente la función $g(x) =$ signo de x^2, en $[-1\,,\,1]$.

   b) Deduzca que g es integrable en $[-1\,,\,1]$.

   c) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$.

7. *a*) Calcule explícitamente la función $g(x) =$ signo de x^3, en $[-1\,,\,1]$.

   b) Deduzca que g es integrable en $[-1\,,\,1]$.

   c) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$.

8. *a*) Calcule explícitamente la función $g(x) =$ signo de $\operatorname{sen} x$, en $[-2\pi\,,\,2\pi]$.

   b) Deduzca que g es integrable en $[-2\pi\,,\,2\pi]$.

   c) Calcule $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} g(x)\,dx$.

9. *a*) Calcule explícitamente la función $g(x) =$ signo de $\cos x$, en $[-2\pi\,,\,2\pi]$.

   b) Deduzca que g es integrable en $[-2\pi\,,\,2\pi]$.

   c) Calcule $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} g(x)\,dx$.

10. Considere $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que f es continua y acotada, donde:

    - $\displaystyle\underline{\int_0^{1/2}} f(x)dx = \frac{3}{8}$
    - $\displaystyle\overline{\int_{1/4}^{1}} f(x)dx = 1$
    - $\displaystyle\overline{f}\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] = 2$

    a) Determine $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

    b) Determine $\overline{f}[0,1]$

3.3. Teorema Fundamental de Cálculo

Como hemos visto en la sección 3.1, calcular integrales usando la definición puede ser extremadamente complicado y, a veces, imposible. El teorema que proporciona una manera de calcular integrales es el que estudiaremos en esta sección. Su fuerza radica en establecer, bajo ciertas condiciones, una relación entre la derivada y la integral.

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función integrable entonces, ella es integrable en los subintervalos $[a,x]$, para todo $x\in[a,b]$. Luego, tiene sentido la siguiente definición,

$$F(x)=\int_a^x f(s)ds.$$

F resulta ser una función con dominio $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma los valores: $F(a)=0$, $F(b)=\displaystyle\int_a^b f(s)ds$. Llamaremos a F la **función integral de** f.

Teorema 3.3.1 Teorema Fundamental del Cálculo
Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable y $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ la función integral de f. Si f es continua en $x_0\in[a,b]$, entonces F es derivable en x_0 y y $F'(x_0)=f(x_0)$.

Demostración: Sea $\varepsilon>0$ y $a<x_0<b$. Como f es continua en x_0 existe $\delta>0$ tal que para $|x-x_0|<\delta$ se cumple $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, y para $0<h<\delta$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right| &= \left|\frac{\displaystyle\int_a^{x_0+h} f(s)ds-\int_a^{x_0} f(s)ds}{h}-f(x_0)\right|\\
&= \left|\frac{\displaystyle\int_a^{x_0+h} f(s)ds+\int_{x_0}^{a} f(s)ds}{h}-f(x_0)\right|\\
&= \left|\frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(s)ds}{h}-f(x_0)\right| = \left|\frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(s)ds-\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)ds}{h}\right|\\
&= \left|\frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} (f(s)-f(x_0))ds}{h}\right| \le \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} |f(s)-f(x_0)|ds}{h}\\
&\le \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\, ds}{h}=\varepsilon
\end{aligned}$$

Análogamente, si $-\delta < h < 0$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &= \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}(f(s)-f(x_0))ds\right| \\
&= \frac{1}{|h|}\left|-\int_{x_0+h}^{x_0}(f(s)-f(x_0))ds\right| \\
&= \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0+h}^{x_0}(f(s)-f(x_0))ds\right| \\
&\leq \frac{\displaystyle\int_{x_0+h}^{x_0}|f(s)-f(x_0)|ds}{|h|} \\
&\leq \frac{\displaystyle\int_{x_0+h}^{x_0}\varepsilon\, ds}{|h|} = \frac{\varepsilon(-h)}{|h|} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto para $0 < |h| < \delta$ vale

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| < \varepsilon$$

Esto es,

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0) = F'(x_0).\blacksquare$$

Teorema 3.3.2 Regla de Barrow
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función tal que $g'(x) = f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Demostración: Sea $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(s)ds$. Como f es continua en $[a,b]$ entonces , usando el Teorema fundamental del Cálculo, tenemos que F es derivable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$.

Por lo tanto, $F'(x) = g'(x)\ \forall\, x \in [a,b]$ y luego $F(x) = g(x) + c$.

Así, $F(a) = g(a) + c$ y como $F(a) = 0$, entonces $-g(a) = c$. Concluimos que: $F(x) = g(x) - g(a)$.

Así para todo $x \in [a,b]$ se tiene $\displaystyle\int_a^x f(s)ds = \int_a^x g'(s)ds = g(x) - g(a)$. $\blacksquare$

Definición 3.3.3 Una función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $g'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a,b]$ la llamaremos una **primitiva** de f.

Observación 3.3.4 En general una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ puede o no tener una primitiva. Pero, si f es continua entonces tiene primitiva dada por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(s)ds$.

Ejemplo 3.3.5 1. $f(x) = x$, $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$ es una primitiva pues $g'(x) = \dfrac{2x}{2} = x$.

2. $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{x^3}{3}$ es una primitiva pues $g'(x) = \dfrac{3x^2}{3} = x^2$.

3. $f(x) = x^n$, $g(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ es una primitiva pues $g'(x) = \dfrac{(n+1)x^{n+1}}{n+1} = x^{n+1}$.

$$\text{Así, } \int_a^b x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

4. $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $g(x) = -\cos(x)$ es una primitiva pues $g'(x) = \operatorname{sen}(x)$.

$$\int_a^b \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x)\Big|_a^b = \cos(a) - \cos(b).$$

En particular,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x) = \cos(0) - \cos(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

El cálculo de primitivas se verá en detalle en el capítulo 4. Una aplicación importante del Teorema Fundamental del Cálculo es la definición de la función logaritmo natural que veremos en la sección 3.4.

Ejercicios resueltos

1. Calcule:

   a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

   b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^b f(s)ds$

   c) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(s)ds$.

Solución:

a) Como $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ es un número, su derivada vale 0.

b) Sea $F(x) = \displaystyle\int_x^b d(s)ds = -\int_b^x f(s)ds$. Usando el Teorema fundamental del Cálculo, tenemos:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_x^b f(s)ds = -f(x).$$

c) Sea $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(s)ds$

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) = F'(x).$$

2. Calcular $F'(x)$ si:

a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}\sqrt{1+\cos t}\ dt$

b) $F(x) = \displaystyle\int_0^x uf(u)du$; f función integrable en $\mathbb{R}$.

c) $F(x) = \displaystyle\int_0^x xf(t)dt$; f función integrable en $\mathbb{R}$.

d) $F(x) = \displaystyle\int_0^x x\sqrt{\operatorname{sen}^2(x+\cos t)}dt$

e) $F(x) = \displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{\operatorname{sen}^2(t+\cos t)}dt$

f) $F(x) = 10x^2 + \displaystyle\int_0^{100} \frac{\operatorname{sen} t^2}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)}dt$

g) $F(x) = 10x^2 + \displaystyle\int_0^{100} \frac{x\ \operatorname{sen} t^2}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)}dt$

h) $F(x) = F(1) + \displaystyle\int_1^{g(x)} f(t)dt$, donde f es continua y g derivable y $g(1) = 1$.

i) $F(x) = \sqrt{x} + \displaystyle\int_1^{x^2} \cos(t^2 \operatorname{sen} t)dt$

j) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left[\int_0^z f(t)dt\right] dz$; f continua;

k) $F(x) = \displaystyle\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$; f continua; g y h derivables en $\mathbb{R}$

l) $F(x) = 400 + \displaystyle\int_1^{\left(\int_{10}^{x} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt\right)} \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)dt$

Solución:

a) $F'(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{1+\cos x})$

b) $F'(x) = xf(x)$

c) $F(x) = x \cdot \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, pues x es independiente de la variable de integración t.Debemos usar la fórmula de derivada de un producto y el teorema Fundamental del Cálculo.

$$F'(x) = \int_0^x f(t)\,dt + x \cdot f(x).$$

d)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x x \cdot \sqrt{\operatorname{sen}^2(x+\cos t)}dt = x \cdot \int_0^x |\operatorname{sen}(x + cost)|dt \\ &= x \cdot \int_0^x |\operatorname{sen} x \cos(\cos t) + \cos x \operatorname{sen}(\cos t)|dt. \end{aligned}$$

- Si $|\operatorname{sen} x \cos(\cos t) + \cos x \operatorname{sen}(\cos t)| = \operatorname{sen} x \cos(\cos t) + \cos x \operatorname{sen}(\cos t)$. Entonces:

$$\begin{aligned} F(x) &= x \cdot \int_0^x \operatorname{sen} x \cos(\cos t)dt + x \cdot \int_0^x \cos x \operatorname{sen}(\cos t)dt \\ &= x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \int_0^x \cos(\cos t)dt + x \cdot \cos x \cdot \int_0^x \operatorname{sen}(\cos t)dt. \end{aligned}$$

  Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \operatorname{sen} x \cdot \int_0^x \cos(\cos t)dt + x \cdot \cos x \int_0^x \cos(\cos t)dt \\ &\quad + x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos(\cos x) + \cos x \int_0^x \operatorname{sen}(\cos t)dt \\ &\quad - x \operatorname{sen} x \int_0^x \operatorname{sen}(\cos t)dt + x \cos x \cdot \operatorname{sen}(\cos x) \end{aligned}$$

- Si $|\operatorname{sen} x \cos(\cos t) + \cos x \operatorname{sen}(\cos t)| = -[\operatorname{sen} x \cos(\cos t) + \cos x \operatorname{sen}(\cos t)]$. Entonces: $F'(x)$ es el inverso aditivo del valor obtenido en el caso anterior.

e) $F(x) = x^3 \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\operatorname{sen}^2(t+\cos t)}dt$

$F'(x) = 3x^2 \cdot \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\operatorname{sen}^2(t+\cos t)}dt$

f) $F'(x) = 20x$.

g) $F'(x) = 20x + \displaystyle\int_0^{100} \frac{\operatorname{sen} t^2}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)}dt.$

h) Si definimos $h(s) = \displaystyle\int_1^s f(t)dt$, entonces podemos escribir:

$$F(x) = F(1) + h(g(x)).$$

Por lo tanto,

$$F'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

i) $F(x) = \sqrt{x} + \displaystyle\int_1^{x^2} \cos(t^2 \operatorname{sen} t)dt.$

Para calcular la derivada del segundo sumando de F, usamos el ejercicio anterior.Así, obtenemos:

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos(x^4 \operatorname{sen} x^2) \cdot 2x.$$

j) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^z f(t)dt\right) dz$

Si definimos $h(z) = \displaystyle\int_0^z f(t)$ entonces, $F(x) = \displaystyle\int_0^x h(z)dx.$

Por lo tanto,

$$F'(x) = h(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

k) $F(x) = \displaystyle\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = \int_{g(x)}^{c} f(t)dt + \int_c^{h(x)} f(t)dt$

Sea $S(z) = \displaystyle\int_z^c f(t)dt = -\int_c^z f(t)dt$, entonces $S'(z) = -f(z)$.

Si $T(r) = \displaystyle\int_c^r f(t)dt$, entonces $T'(r) = f(r)$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= S(g(x)) + T(h(x)) \\
F'(x) &= S'(g(x)) \cdot g'(x) + T'(h(x)) \cdot h'(x) \\
&= g'(x) \cdot (-f(g(x))) + f(h(x)) \cdot h'(x) \\
&= -g'(x) \cdot f(g(x)) + f(h(x)) \cdot h'(x).
\end{aligned}$$

l) $F(x) = 400 + \int_1^{\left(\int_{10}^{x} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t} dt\right)} \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)\, dt.$

Sea $h(x) = \int_{10}^{x} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t} dt$, entonces $h'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}$.

$$F(x) = 400 + \int_1^{h(x)} \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t) dt$$

Sea $S(z) = \int_1^{z} \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t) dt$, entonces $S'(z) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} z)$.

Así,

$$\begin{aligned} F(x) &= 400 + S(h(x)) \\ F'(x) &= S'(h(x)) \cdot h'(x) = \\ &= \operatorname{sen}(\operatorname{sen} h(x)) \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}. \end{aligned}$$

3. Use el Teorema Fundamental del Cálculo y el Teorema de la Función Inversa para resolver los siguientes ejercicios, los que deben ser resueltos sin calcular las integrales.

   a) Dado $F(x) = \int_1^{x} \frac{1}{t} dt$;

   1) Determine el dominio de F.
   2) Justifique la existencia de F' y calcúlela.
   3) Deduzca que F es inyectiva.
   4) Justifique la existencia de F^{-1} y $(F^{-1})'$. Calcule $(F^{-1})'$ en términos de F^{-1}.

   Solución:

   1) Para que F esté bien definida la función $\frac{1}{t}$ debe ser al menos acotada en el intervalo de integración, por lo tanto x sólo puede tomar valores positivos. Así,
   $$D(F) =]0, +\infty[.$$
   2) Como $\frac{1}{t}$ es continua, el Teorema fundamental del Cálculo dice que
   $$F'(x) = \frac{1}{x}.$$

3) Como $F'(x) = \dfrac{1}{x}$, tenemos que la derivada de F es positiva en todo su dominio, por la tanto la función F es estrictamente creciente. Luego, es inyectiva.

4) El análisis hecho en los ítemes anteriores demuestran que se cumplen las hípotesis del Teorema de la Función Inversa. Entonces F^{-1} existe y es derivable. Su derivada es:

$$(F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))} = \frac{1}{\dfrac{1}{(F^{-1}(x))}} = F^{-1}(x).$$

Esto nos dice que la derivada de F^{-1} es ella misma.

b) Dada $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$

1) Determine el dominio de F
2) Justifique la existencia de F' y calcúlela.
3) Deduzca que F es estrictamente creciente.
4) Justifique la existencia de F^{-1} y $(F^{-1})'$. Calcule $(F^{-1})'$ en términos de F^{-1}.

Solución:

1) Como la función $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ es continua en cualquier intervalo $[0, x]$ con $x \in \mathbb{R}$, la integral de $f(t)$ existe y F tiene como dominio $\mathbb{R}$.

2) El Teorema fundamental del Cálculo dice que F es derivable y que

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

3) Del ítem anterior podemos deducir que $F'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la función F es estrictamente creciente, luego es inyectiva.

4) Así, ella puede ser invertida sobre su recorrido. Es decir existe F^{-1}. El Teorema de la función inversa asegura que esta inversa es derivable y que su derivada es:

$$(F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))} = \frac{1}{\dfrac{1}{1+\left(F^{-1}(x)\right)^2}} = 1 + ((F^{-1})(x))^2.$$

4. Sea f una función derivable de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$, continua tal que $f(0) = 1$ y $f'(x) = f(x)$, para todo x.

a) Demuestre que:

$$\int_0^x f(t)dt = f(x) - f(0)$$

b) Demuestre que es inyectiva.

c) Demuestre que $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{x}$

d) Demuestre que $f^{-1}(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt$

Solución:

a) Usando la Regla de Barrow, tenemos: $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$.

b) $f'(x) = f(x) > 0$ para todo x, implica que f es estrictamente creciente, y por lo tanto, es inyectiva.

c) Por Teorema de la Función Inversa , existe $f^{-1}(x)$ definida sobre el recorrido de f, es derivable y su derivada es:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x}.$$

d)

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt = \int_1^x (f^{-1})'(t)dt = (f^{-1})(x) - (f^{-1})(1) = (f^{-1})(x).$$

Hemos usado que $f(0) = 1$ lo que es equivalente a que $f^{-1}(1) = 0$.

3.4. Las funciones logaritmo natural y exponencial

3.4.1. Definición y propiedades de la función logaritmo natural

La función $f(t) = \dfrac{1}{t}$, con $t > 0$ es continua, por lo tanto para cualquier x positivo existe el número:

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt$$

Por esta razón tiene sentido la siguiente definición:

Definición 3.4.1 Dado x positivo llamaremos logaritmo natural de x al número:

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt$$

y lo denotaremos por $\ln x$.

$$\boxed{\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt}$$

Sea $f(x) = \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

1. $D(f) = \mathbb{R}^+$.
2. **Signo de** f:
   - Si $x > 1$, entonces $\ln x > 0$.
   - Si $0 < x < 1$, entonces $\quad \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt < 0.$
   - Si $x = 1$, entonces $\quad \ln 1 = \displaystyle\int_1^1 \frac{1}{t}dt = 0.$

   $$\ln x = 0 \Longleftrightarrow x = 1.$$
3. $\ln x$ es continua en todo su dominio, como consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo.

4. $\ln x$ es derivable y $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$.

   En efecto, el Teorema Fundamental del Cálculo asegura que la función $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt$ es derivable en cada x y que su derivada es $\dfrac{1}{x}$.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}}$$

5. $\ln x$ **es estrictamente creciente.**

   Como $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$ y x es positivo, $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Por lo tanto, f es estrictamente creciente.

6. $\ln x$ **es cóncava.**

$$f(x) = \ln x$$
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^+$$

Ejemplo 3.4.2 1. Encuentre el dominio de:

a) $\ln(\ln x)$

b) $\ln(\sqrt{x-3})$

c) $\ln(\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x})$

d) $\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

Solución:

a) Si $h(x) = \ln(\ln x)$, entonces considerando que el logaritmo está definido sólo para números positivos tenemos que:

$$D(h) = \{x \in \mathbb{R} : \ln x > 0\ \} =]1\,,\,+\infty[.$$

b) El dominio de $\ln(\sqrt{x-3}$ está formado por los números reales tales que $\sqrt{x-3} > 0$. Es decir,

$$\{x \in \mathbb{R} : x > 3\}.$$

c) La expresión $\ln(\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x})$ define un número real cuando $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$ es positivo. Por lo tanto, basta que se cumpla $x - 3 > 0$ y $5 - x > 0$. Así, tenemos que el dominio de la función es:

$$[3\,,\,5].$$

d) Como el argumento de logaritmo está en valor absoluto, sólo debemos evitar los valores de x que anulan el numerador y el denominador. El dominio de esta función es

$$\{x \in \mathbb{R} : (1+x) \neq 0\ (1-x) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$$

2. Calcule la derivada de $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.
Usando la Regla de la Cadena, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right)}{dx} &= \frac{1}{\dfrac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{d\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}{dx} \\
&= \frac{1-x}{1+x} \cdot \left(\frac{(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}\right) \\
&= \frac{2}{1-x^2}.
\end{aligned}$$

3. Analice el dominio y el signo de la función: $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

- Dominio $= \mathbb{R}$. En efecto:

$$1 + x^2 > x^2 \geq 0\,;\text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} \geq 0\,;\text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$$\sqrt{1+x^2} > |x|\ ;\text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Esto implica que

$$x + \sqrt{1+x^2} > x + |x| \geq 0\ ;\text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

- **Ceros y signo de la función**

$$\begin{aligned}
\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = 0 &\iff x+\sqrt{1+x^2} = 1 \\
&\iff \sqrt{1+x^2} = 1-x \\
&\iff 1+x^2 = (1-x)^2 \\
&\iff x = 0.
\end{aligned}$$

Así, vemos que la función tiene un único cero en $x = 0$ y es positiva sobre $\mathbb{R}^+$, ya que si $x > 0$ entonces $x+\sqrt{1+x^2} > 1$. En cambio, cuando $x < 0$ tenemos que $0 < x+\sqrt{1+x^2} < 1$, lo que implica que la función es negativa sobre $\mathbb{R}^-$.

Propiedades aritméticas del logaritmo

Teorema 3.4.3 Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ entonces,

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Demostración: Usando la regla de la cadena, podemos calcular la derivada de la compuesta $\ln(a\ x)$:

$$\frac{d}{dx}\ln(a\ x) = \frac{1}{ax}\frac{d}{dx}(ax) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}; \quad a \text{ constante}$$

Esto quiere decir que $\ln x$ y $\ln(a\ x)$ tienen la misma derivada, entonces:

$$\ln(ax) = \ln x + c \tag{3.1}$$

Para calcular c, evaluamos la ecuación (3.1) para $x = 1$ y nos queda:

$$\ln a = \ln 1 + c \text{ lo que implica que } \ln a = c$$

Así, la ecuación (3.1) queda como:

$\ln(a\ x) = \ln x + \ln a$, cualquiera sea x. Si hacemos $x = b$, obtenemos la fórmula buscada.

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b} \tag{3.2}$$

Corolario 3.4.4 Si $a \in \mathbb{R}^+$, entonces
$\ln\dfrac{1}{a} = -\ln a$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\ln 1 = 0 &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{a}{a}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a
\end{aligned}$$

■

Corolario 3.4.5 Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) &= \ln a + \ln\frac{1}{b} \\
&= \ln a - \ln b
\end{aligned}$$

■

Corolario 3.4.6 Si $a > 0$, $r \in \mathbb{Q}$,, entonces:

$$\ln(a^r) = r\ln a$$

Demostración:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(x^r)\right) = \frac{1}{x^r} r x^{r-1} = r x^{-1} = \frac{r}{x} = \frac{d}{dx}(r\ln x)$$

Esto nos dice que $\ln x^r$ y $r\ln x$ tienen la misma derivada, por lo tanto ellas difieren en una constante. Así,

$$\ln x^r = r\ln x + c$$

Evaluando en $x = 1$, se obtiene que $c = 0$, por lo tanto

$$\boxed{\ln a^r = r\ln a}$$

■

Corolario 3.4.7 $\ln x$ no es acotada superiormente:

Demostración: Como $\ln x$ es estrictamente creciente, entonces $2 > 1 \Rightarrow \ln 2 > 0$. Esto implica que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln 2^n = \lim\limits_{n\to+\infty} n \ln 2 = +\infty$.

Dado $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\ln 2^N > M$$

Como nos interesa el comportamiento de $\ln x$ cuando $x \to +\infty$, entonces si

$$\begin{aligned} & x > 2^N \\ \text{se tiene que} \quad & \ln x > \ln 2^N > M \\ \text{Por lo tanto,} \quad & \ln x \to +\infty. \end{aligned}$$

Así, como $\ln x$ es creciente tenemos que:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty}$$

■

Corolario 3.4.8 $\ln x$ no es acotada inferiormente y $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Demostración:

- Usando $y = \dfrac{1}{x}$ tenemos que $y \to +\infty \Leftrightarrow x \to 0^+$

  Así,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{y\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to+\infty} -\ln y &= -\lim_{y\to+\infty} \ln y \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty}$$

- $\mathrm{Rec}(\ln x) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

- Gráfico de $\ln x$:

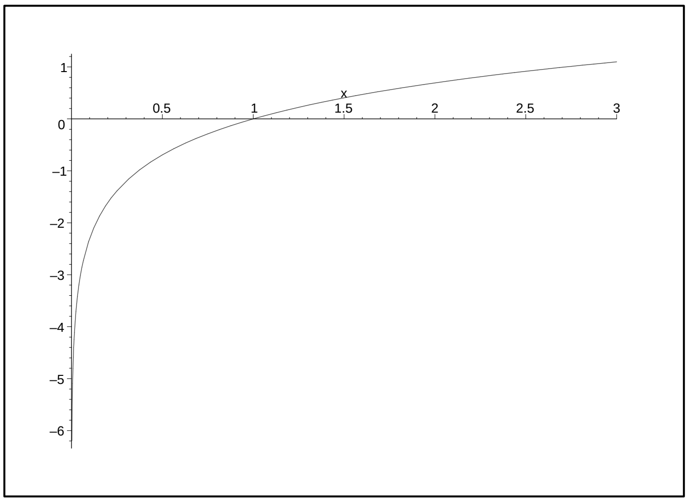


Figura 3.1: Gráfico de $\ln x$

El número "e"y la función $\ln x$

Recordemos que:

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Demostremos que $\ln e = 1$.

- $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

  $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ da lugar a una forma indeterminada de tipo $+\infty \cdot 0$.

  Para usar la regla de L'Hôspital se debe llevar a una forma $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \text{ Entonces,}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)} = 1$$

- En particular $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = 1.$

  Como $\ln x$ es continua,

  $$= \ln\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 1, \text{ entonces}$$

  $\ln e = 1$

Ejemplo 3.4.9 Determinar el dominio de $\ln(\ln(\ln x))$. Si $g(x) = \ln\ln(\ln x)$, entonces considerando que el logaritmo está definido sólo para números positivos tenemos que:

$$D(g) = \{x\in\mathbb{R} : \ln(\ln x) > 0\ \} = \{x\in\mathbb{R} : \ln x > 1\ \} =]e, +\infty[.$$

3.4.2. La función exponencial

Las propiedades estudiadas de la función logaritmo natural, permiten concluir que $f(x) = \ln x$ es invertible. Por lo cual existe f^{-1}:

$$y = f^{-1}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

Como $\ln x$ es creciente y continua, su inversa también es creciente y continua. Dada su importancia en el análisis matemático, recibe un nombre particular, se llama **función exponencial de base** e o solamente **función exponencial**, la denotaremos

$$\boxed{y = \exp x} \tag{3.3}$$

Por ser la función inversa de $\ln x$ tenemos las fórmulas:

$$\boxed{\exp(\ln x) = x;\ \text{si } x > 0 \quad \text{y} \quad \ln(\exp x) = x, \text{ si } x\in\mathbb{R}.}$$

En particular se tiene:

$$\begin{aligned}\exp(\ln 1) = 1 \Leftrightarrow \exp 0 = 1\\ \exp(\ln e) = e \Leftrightarrow \exp 1 = e\end{aligned}$$

donde $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Teorema 3.4.10 Si x e y son números reales cualesquiera, entonces

$$\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$$

Demostración: Sea $a = \exp x$ y $b = \exp$. Por definición de la función exponencial se tiene que: $x = \ln a, y = \ln b$.

Así, $x + y = \ln a + \ln b = \ln ab$. Por lo tanto,

$$\exp(x+y) = \exp(\ln ab) = ab = (\exp x)(\exp y).$$

■

Consecuencia:

$$\begin{aligned}\exp(1) &= e\\ \exp(2) &= \exp(1+1) = (\exp 1)(\exp 1)\\ &= ee = e^2\end{aligned}$$

Inductivamente,

$$\exp(n) = e^n; \quad n \in \mathbb{N}$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{aligned}\exp(0) &= 1 = e^0\\ 1 &= \exp(0) = \exp(1-1) = \exp(1)\exp(-1)\\ 1 &= e\cdot\exp(-1)\\ \exp(-1) &= \frac{1}{e} = e^{-1}\end{aligned}$$

Así, la fórmula puede extenderse a los enteros.
En general, escribiremos:

$$\exp(x) = e^x; \quad x \in \mathbb{R}$$

Con esta escritura, el Teorema se escribe

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y; \;\; x, y \in \mathbb{R}$$

Propiedades de la función exponencial e^x

Teorema 3.4.11 La función

$$\exp x = e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

tiene las siguientes propiedades:

- Es continua.
- Es creciente.
- No es acotada superiormente.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0.$
- Es derivable y
$$\frac{d}{dx} \exp \;\; x = \frac{d}{dx} e^x = e^x.$$
- Es convexa

Demostración: En efecto:

- e^x no es acotada superiormente, si lo fuera:
$$\begin{aligned} e^x &< M; \;\; \text{para todo } \; x \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \ln e^x < \ln M \\ &\Rightarrow x < \ln M, \;\; \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \mathbb{R} \text{ acotado superiormente .} \end{aligned}$$

  Esta contradicción permite concluir que e^x no es acotada superiormente. Además, como e^x es creciente, tenemos que
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

- Para calcular la derivada de la función exponencial usaremos el **Teorema de la Función Inversa**:

  $y = e^x$ es la inversa de $\ln x$, por lo tanto.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^x = \frac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{\dfrac{d(\ln y)}{dy}} = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{y}\right)} = y$$
$$= e^x$$

- En particular,
$$\frac{d^2}{dx^2}(e^x) = e^x > 0,$$
  implica que e^x es convexa.

■

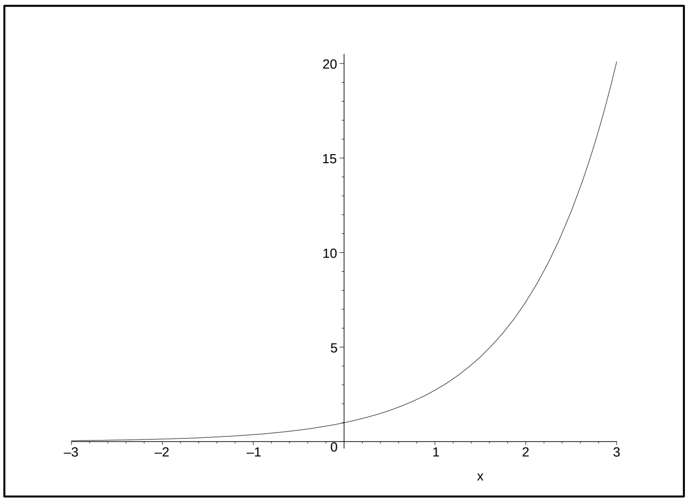


Figura 3.2: Gráfico de e^x

cm

Ejemplo 3.4.12 Derivar:

1. e^{8x-2}

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(e^{8x-2}\right) &= e^{8x-2}\frac{d}{dx}(8x-2)\\ &= 8e^{8x-2}.\end{aligned}$$

2. e^{-5x+3x^2}

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(e^{-5x+3x^2}\right) &= e^{-5x+3x^2}\frac{d}{dx}\left(-5x+3x^2\right)\\ &= (-5+6x)e^{-5x+3x^2}.\end{aligned}$$

3. xe^x

Solución:

$$\frac{d}{dx}(xe^x) = e^x + xe^x.$$

4. e^{-x^2}

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(e^{x-^{2}}\right) &= e^{-x^2}\frac{d}{dx}\left(-x^2\right)\\ &= -2xe^{-x^2}.\end{aligned}$$

5. $e^x\sqrt{1-x^2}$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\sqrt{1-x^2}\right) = e^x\sqrt{1-x^2} - e^x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6. $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) &= \frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}\\ &= \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}\end{aligned}$$

7. $e^{\sqrt{x+1}}$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x+1}}\right) &= e^{\sqrt{x+1}}\frac{d}{dx}\sqrt{x+1}\\ &= \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}\end{aligned}$$

8. $\sqrt{1+e^x}$.

Solución:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1+e^x} = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$$

Las funciones logarítmicas y exponencial con base cualquiera $b > 0$

Definiremos el número $\log_b x$ mediante la fórmula:

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Esta igualdad vale sólo cuando $b > 0$: y $b \neq 1$.
Esta función, por ser el producto de $\ln x$ por la constante $\dfrac{1}{\ln b}$ cumple esencialmente con las mismas propiedades que $\ln x$.

Propiedades de la función $\log_b x$

- *Dom* $\log_b x = \mathbb{R}^+$

- Si $b > 1$, $\ln b > 0$ y por lo tanto: $\log_b x$ es estrictamente creciente y

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \log_b x &= +\infty, \quad b > 1\\ \lim_{x\to 0} \log_b x &= -\infty, \quad b > 1\end{aligned}$$

- Si $0 < b < 1$; $\ln b < 0$, entonces $\log_b x$ es decreciente y $\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \log_b x &= -\infty, \quad \text{si } 0 < b < 1\\ \lim_{x\to 0^+} \log_b x &= +\infty, \quad \text{si } 0 < b < 1\end{aligned}$

- $\boxed{\dfrac{d}{dx} \log_b x = \dfrac{1}{(\ln b)x}}$

Demostración: Se deja de ejercicio.

Teorema 3.4.13 1. $\log_b u \cdot v = \log_b u + \log_b v$

2. $\log_b u^n = n \log_b u; \quad n \in \mathbb{N}$
3. $\log_b \dfrac{1}{v} = -\log_b v$
4. $\log_b \dfrac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$
5. $\log_b u^x = x \log_b u; x \in \mathbb{R}$
6. Fórmula de cambio base de los logaritmos $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

Demostración: Se deja de ejercicio.

La función $b^x, b > 0$

Ahora definiremos la función exponencial con base cualquiera positiva, mediante la siguiente ecuación:

$$\boxed{b^x = e^{x \ln b}} \tag{3.4}$$

Propiedades:

- $b^0 = e^0 = 1$.
- $b^1 = e^{\ln b} = b$.
- $b^{-x} = e^{-x \ln b} = \dfrac{1}{e^{x \ln b}} = \dfrac{1}{b^x}$.

- $b^{x+y} = e^{(x+y)\ln b} = \quad e^{x\ln b + y\ln b} = e^{x\ln b}\cdot e^{y\ln b} = b^x\cdot b^y.$
- El Dominio de b^x es $\mathbb{R}$ y su recorrido es $\mathbb{R}^+$
- b^x es una función continua
- $\lim\limits_{x\to+\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad b>1 \\ 0 & \text{si} \quad 0<b<1 \\ 1 & \text{si} \quad b=1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} b^x = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad b>1 \\ +\infty & \text{si} \quad 0<b<1 \\ 1 & \text{si} \quad b=1 \end{cases}$
- La función b^x es derivable, y se tiene:

$$\frac{d}{dx}b^x = (\ln b)e^{x\ln b} = (\ln b)b^x$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}b^x = (\ln b)b^x}$$

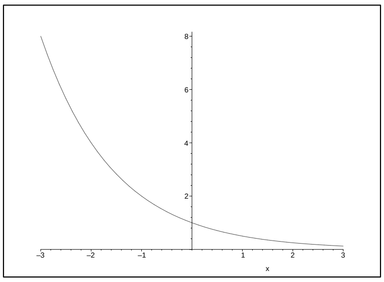


Figura 3.3: Gráfico de b^x; con $0 < b < 1$

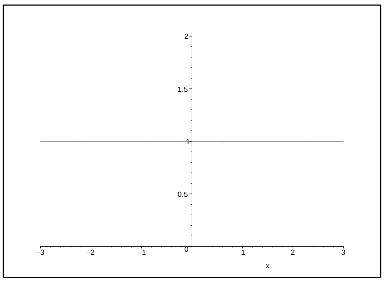


Figura 3.4: Gráfico de b^x; con $b = 1$

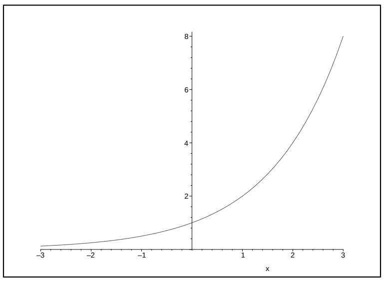


Figura 3.5: Gráfico de b^x; con $b > 1$

Ejemplo 3.4.14 1. Derive las siguientes funciones:

- $x10^x$.

  Solución:

$$\frac{d}{dx}(x10^x) = 10^x + x \cdot \ln(10) \cdot 10^x$$

$$= 10^x (1 + x\ln(10))$$

- b^{x^2}.

  Solución:

$$\frac{d}{dx}\left(b^{x^2}\right) = \ln b \cdot b^{x^2} \cdot 2x$$

$$= (2\ln b)\, x b^{x^2}$$

- $b^x x^b$.

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(b^x x^b\right) &= \frac{d}{dx}\left(b^x\right)\cdot x^b + b^x\frac{d}{dx}\left(x^b\right)\\ &= (\ln b)b^x x^b + b^x b x^{b-1}\\ &= (\ln b)b^x x^b + b^{x+1}x^{b-1}\end{aligned}$$

- $\dfrac{1-10^x}{1+10^x}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1-10^x}{1+10^x}\right) &= \frac{-\ln(10)10^x\left(1+10^x\right)-\left(1-10^x\right)\ln 10\cdot 10^x}{\left(1+10^x\right)^2}\\ &= \frac{-\ln(10)\cdot 10^x\left(1+10^x+1-10^x\right)}{\left(1+10^x\right)^2}\\ &= \frac{-2\ln(10)10^x}{\left(1+10^x\right)^2}\end{aligned}$$

- $\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{2^x-2^{-x}}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(2^x\ln 2+2^{-x}\ln 2\right)\\ &= \frac{\ln 2}{2}\left(2^x+2^{-x}\right)\end{aligned}$$

3.4.3. Aplicaciones de la función exponencial:

Los materiales radiactivos se descomponen a una razón que es proporcional a la cantidad de material presente en cada momento. Esto significa que si $y = y(t)$ es la cantidad de material radiactivo en el tiempo t, entonces la función y satisface una ecuación diferencial de la forma:

$$(1) \qquad \frac{dy}{dt} = ry; \text{ donde } r \text{ es una constante negativa}$$

La ecuación (1) se llama ecuación diferencial porque ella involucra la derivada de una función desconocida $y = y(t)$.Resolver la ecuación diferencial es encontrar una función que satisfaga la ecuación.

Bajo ciertas circunstancias, poblaciones de animales o de bacterias pueden considerarse que crecen a una razón que simpre es proporcional al número presente. En este caso, el tamaño $y = y(t)$ de la población en tiempo t satisface una ecuación diferencial de la forma (1) con una constante positiva r.

Teorema 3.4.15 Para una constante r, las soluciones de la ecuación diferencial.

$$(1) \qquad \frac{dy}{dt} = ry$$

son de la forma:

$$(2) \qquad y = Ce^{rt}$$

donde C es una constante arbitraria.

Demostración: Si $y = Ce^{rt}$,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[Ce^{rt}] = Ce^{rt}\frac{d}{dt}(rt) = rCe^{rt} = ry$$

Con esto hemos demostrado que $y = Ce^{rt}$ es solución de la ecuación (1). Pero ,¿Son todas sus soluciones de esta forma? Es lo que veremos ahora.

Si y es una solución de (1), entonces:

$$\frac{d}{dt}[e^{-rt}y] = e^{-rt}\frac{dy}{dt} + y\frac{d}{dt}e^{-rt} = e^{-rt}\left[\frac{dy}{dt} - ry\right] = 0$$

Esto demuestra que ye^{-rt} es igual a una constante C y nos da (2).

Desintegración radioactiva: El promedio de la desintegración radioactiva usualmente se describe dando la vida media de la sustancia. Este es el tiempo que toma una muestra en reducirse a la mitad.$\blacksquare$

Ejemplo 3.4.16 Una sustancia radioactiva tiene una media de T años, y la cantidad $y(t)$ en una muestra satisface la ecuación diferencial

$$(1) \qquad \frac{dy}{dt} = ry$$

¿Cómo están relacionadas las constantes T y r?.

Solución: La soluciones de la ecuación (1) son de la forma

$$(2) \qquad y(t) = Ce^{rt}$$

Ya que T es la ida media de la sustancia, tenemos que $y(t+T) = \frac{1}{2}y(t)$, para todo t. Con la ecuación (2) esto da $Ce^{r(t+T)} = \frac{1}{2}Ce^{rt}$. Cancelando Ce^{rt} en ambos miembros de la última ecuación, obtenemos:

$$(4) \qquad e^{rT} = \frac{1}{2}, \text{ que es la expresión que}$$

relaciona r y T.

Podemos escribir la relación (4) en una forma más conveniente tomando el logaritmo natural en ambos miembros, obteniendo:

$$(5) \qquad r = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Observe que siendo $\frac{1}{2}$ un número menor que 1, r es un número negativo, como era de esperar.

Si sustituimos la expresión (5) para la constante r en la fórmula (2) para saber que cantidad de substancia radioactiva está presente en el tiempo t obtenemos

$$y(t) = Ce^{(t/T)\ln(1/2)}$$

$$(6) \qquad y(t) = C\left[\frac{1}{2}\right]^{t/T}$$

Esta expresión muestra claramente que la mitad desaparece cada T años.

Crecimiento biológico: El crecimiento biológico es un fenómeno más complicado que el de la desintegración radioactiva, pues en rigor hay muchos factores - generalmente aleatorios - que están influyendo, los cuales son difíciles de modelar. Sin embargo, en muchas situaciones un buen modelo matemático para el crecimiento biológico, se obtiene suponiendo que la razón del crecimiento es proporcional al tamaño, y podemos estudiar tal modelo usando la ecuación diferencial (1).

Ejemplo: Si la población del país es en el 2002 de 15 millones de habitantes y la razón instantánea de crecimiento fuera en cualquier momento del 3 % . ¿Cuál será la población en los siguietes 50 años?

Solución: Sea t el tiempo medido en años y $P(t)$ la población del país en el tiempo t, medida en millones. Tenemos que:

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}03 \; P(t)$$

$$P(2002) = 15 \text{ millones}.$$

Las soluciones de esta ecuación diferencial son:

$$P = Ce^{0{,}03t}$$

y el dato inicial de $P(2002) = 15$ nos sirve para determinar la constante C.

$$C = 15e^{-0{,}03(2002)}$$

Por lo tanto $P(t) = 15e^{0{,}03(t-2002)}$.

En el año 2.052 la población será igual a $P(2{,}052)$, es decir,

$$e^{0{,}03(2{,}052-2002)} = 15e^{0{,}03(50)} = 15e^{1{,}5} \text{ millones}$$

$$15e^{1{,}5} \approx 67{,}2255 \text{ millones}$$

3.4.4. Las funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas que son ciertas combinaciones de la función exponencial e^x, aparecen en muchas aplicaciones.

Definición 3.4.17 Se definen las funciones seno hiperbólico, coseno hiperbólico, tangente hiperbólica y cotangente hiperbólica por las respectivas fórmulas:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{cotanh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\text{sech } x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \qquad \text{cosech } x = \frac{1}{\text{senh } x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Todas ellas están definidas para todo x en $\mathbb{R}$, excepto la $\text{cotanh } x$ y la $\text{cosech } x$ que no están definidas para $x = 0$.

La relación fundamental de estas funciones y que, en parte, justifica su nombre es:

$$\cosh^2 x - \text{ senh }^2 x = 1 \tag{3.5}$$

La cual puede verificarse mediante un cálculo directo. Si escribimos:
$x = \cosh t$, $y = \text{ senh } t$, la relación (3.5) puede escribirse como

$$x^2 - y^2 = 1, \tag{3.6}$$

lo que nos dice que el punto $(x, y) = (\cosh t, \text{ senh } t)$ se mueve a lo largo de la hipérbola (3.6), cualquiera sea el valor de $t \in (-\infty, \infty)$.

Las funciones hiperbólicas satisfacen algunas propiedades al estilo de las trigonométricas como veremos en los siguientes teoremas.

Teorema 3.4.18 Teorema de adición.

$$\cosh(a + b) = \cosh a \cosh b + \text{senh } a \text{senh } b$$

$$\text{senh }(a + b) = \text{senh } a \cosh b + \cosh a \text{senh } b.$$

Demostración:

$$cosh(a + b) = \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} = \frac{e^a e^b + e^{-a} e^{-b}}{2}. \tag{3.7}$$

Por otro lado:
$\cosh x + \text{ senh } x = e^x$; $\cosh x - \text{ senh } x = e^{-x}$.

Reemplazando estas igualdades con $x = a,\ b, -a, -b$ en (3.7) se obtiene el Teorema.

■

Teorema 3.4.19 Las derivadas de las funciones hiperbólicas.

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \text{ senh } x, \qquad \frac{d}{dx}\text{ senh } x = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}, \qquad \frac{d}{dx}\coth x = -\frac{1}{\text{senh}^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\text{sech } x = -\tanh x\text{sech } x\,, \qquad \frac{d}{dx}\text{cosech } x = -\text{cotanh } x\text{cosech } x.$$

Demostración:

Es una consecuencia inmediata de las propiedades de e^x y de la derivada en general.

■

Gráficos de las funciones hiperbólicas.

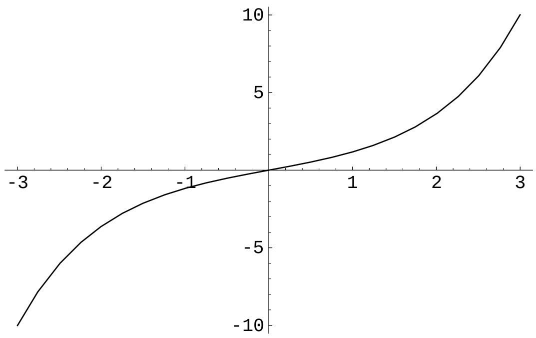


Figura 3.6: Gráfico de $\text{senh}\, x$

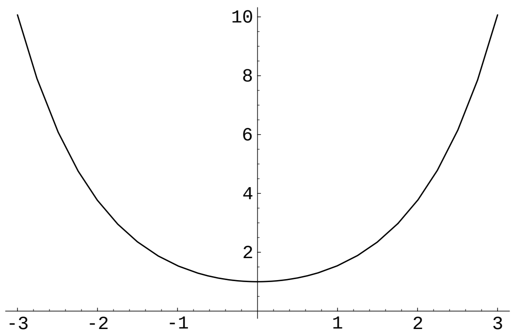


Figura 3.7: Gráfico de $\cosh x$

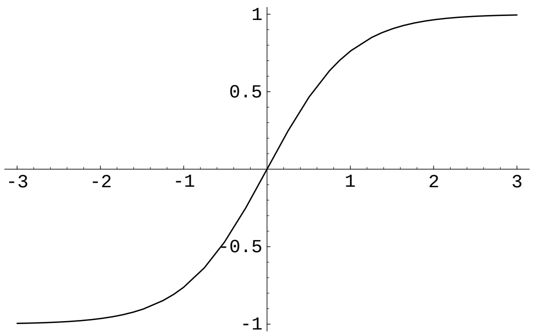


Figura 3.8: Gráfico de $\tanh x$

Teorema 3.4.20 Las funciones hiperbólicas inversas.

Las funciones hiperbólicas $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$, $\tanh x$, cotanh , sech x, cosech xx, tienen inversas que denotaremos respectivamente por:
arcsenh x, arccosh x, arctanh x, arccotanh x, arcsech x, arccosech x.

Demostración:

1. Del estudio del gráfico hemos visto que $\operatorname{senh} x$ es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$, por tanto inyectiva con recorrido igual a $\mathbb{R}$. Así, existe su función inversa de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Calculemos su expresión analítica:

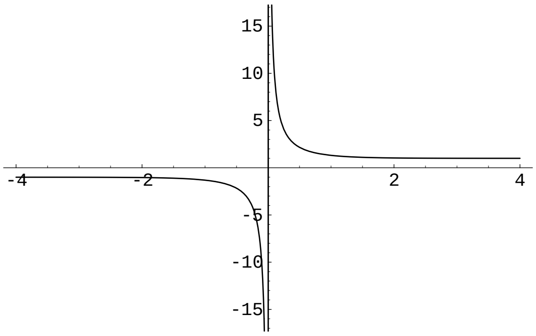


Figura 3.9: Gráfico de $\coth x$

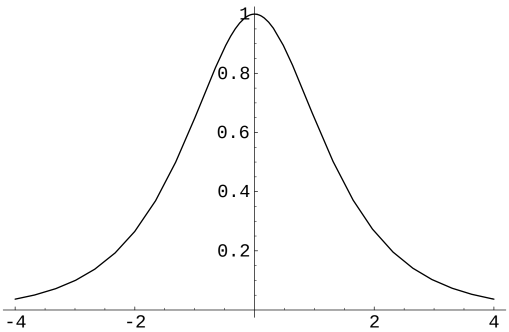


Figura 3.10: Gráfico de $\operatorname{sech} x$

$$
\begin{aligned}
y &= \operatorname{senh} x \\
y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
2y &= e^2 - e^{-x} \quad /.\ e^x \\
2ye^x &= e^{2x} - 1 \\
e^{2x} - 2ye^x - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

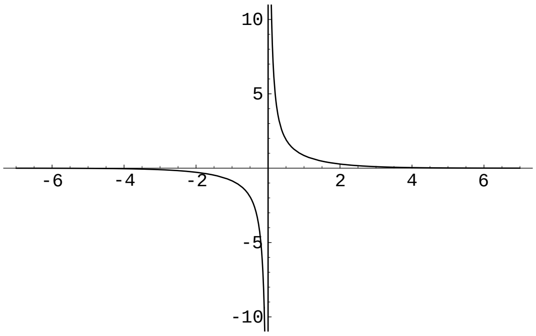


Figura 3.11: Gráfico de cosech x

Calculando el valor de $u = e^x$ obtenemos:

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2}$$

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$$

(Pues $y - \sqrt{y^2-1} < 0$).
Así, $\text{arc senh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

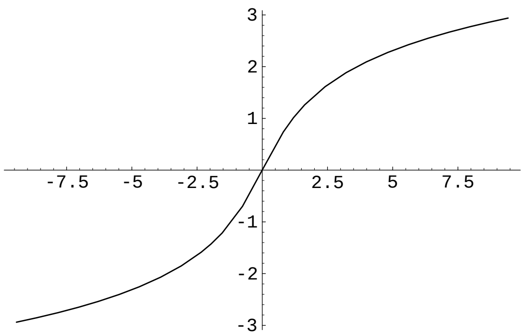


Figura 3.12: Gráfico de arcsenh x

2. Como la función $\cosh x$ no es inyectiva, puede invertirse sobre $[0, +\infty[$ o $]-\infty, 0]$.

Para obtener la fórmula de esta inversa se sigue un procedimiento similar al hecho para arcsenh y se obtiene una de las dos posibilidades:

- $y = \operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, con dominio $[1, +\infty[$ y recorrido $(0, +\infty)$.
- Si se invierte sobre $]-\infty, 0]$, entonces $y = \operatorname{arccosh} x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$, con dominio $[1, +\infty[$ y recorrido $]-\infty, 0]$.

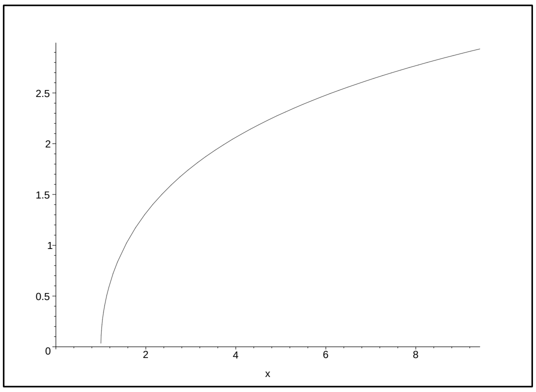


Figura 3.13: Gráfico de arccosh x

3. $arc \tanh x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ para $x \in (-1, 1)$

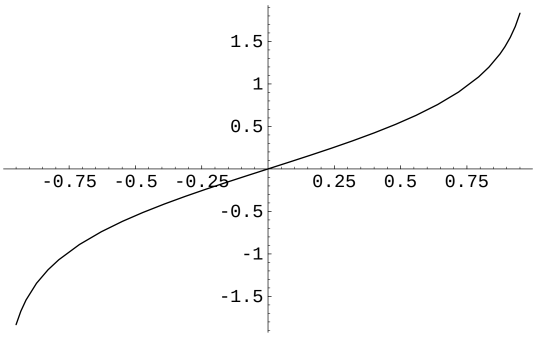


Figura 3.14: Gráfico de arctanh x

4. $arc \coth x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1}$ para $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. ■

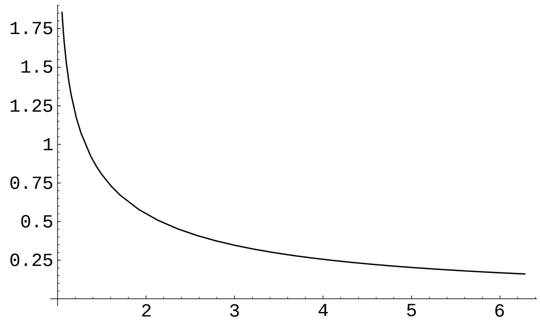


Figura 3.15: Gráfico de arccotanh x

Teorema 3.4.21 Las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas.

$$\frac{d}{dx} arc\cosh\, x = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}; \quad \frac{d}{dx}\text{ arc senh } x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx} arc\tanh\, x = \frac{1}{1-x^2}; \quad \frac{d}{dx} arc\coth\, x = \frac{1}{1-x^2}.$$

Demostración: Se puede realizar mediante un cálculo directo via regla de la cadena o usando el Teorema de la Función inversa. ■

Teorema 3.4.22 Las integrales de las funciones hiperbólicas

$$\int \operatorname{senh} \; x\, dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x\, dx = \operatorname{senh} \; x$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x}\, dx = -\operatorname{cotanh} x$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\, dx = \tanh x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \text{arc senh } x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = arc\cosh x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) \quad |x|>1;$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} = \begin{cases} arc\tanh x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}; & |x|<1 \\ arc\coth x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}; & |x|>1. \end{cases}$$

Demostración:

Se obtienen directamente de la definición de la integral indefinida. ■

3.4.5. La regla de L'Hôpital y cálculo de límites de formas indeterminadas de tipo exponencial

Formas indeterminadas del tipo 0^0, ∞^0, 1^∞. Estas pueden ser tratadas usando que e^x es la inversa de $\ln x$. Entonces,

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\cdot \ln f(x)}.$$

En el último paso se ha usado la continuidad de la función exponencial.

Ejemplo 3.4.23 1. Forma del tipo 1^∞.

$$\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln\cos x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln\cos x}.$$

Para calcular el límite del exponente debemos ocupar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln\cos x = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln\cos x)'}{x'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\tan x}{1} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

2. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right)$.

Solución: Este límite corresponde a una forma indeterminada del tipo $\infty - \infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\,\ln(1+x)} \quad \left(=\frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}} \quad \left(=\frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x} \quad \left(=\frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3. *a*) Calcular $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t}$.

   b) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.

   c) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$.

   d) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x^x-1}$.

   e) Sea $f(x) = x^x$ si $x > 0$ y $f(0) = 1$. Calcular $f'_+(0)$.

Solución:

a) Esta es una forma del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, por tanto aplicando la regla de L'Hôpital para este caso tenemos:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}}{1} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t} = 0.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\ln\frac{1}{t}}{t} = \lim\limits_{t\to\infty} -\dfrac{\ln t}{t} = 0.$

c) Esta corresponde a una forma del tipo 0^0. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1.$

d) Esta vez tenemos una forma del tipo $\dfrac{0}{0}$. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x^x - 1} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^x(\ln x + 1)} = 0.$

e) $f'_+(0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^h - 1}{h} = -\infty.$
Por ser el valor inverso del límite calculado anteriormente que tiende a 0 negativamente.

4. Calcular $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

Solución: Tenemos una forma del tipo 1^∞. Por tanto,

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\ln x^{\frac{1}{x-1}}} = e^{\lim\limits_{x\to 1} \ln x^{\frac{1}{x-1}}}.$$

Calculando aparte el exponente de e tenemos:

$$\lim_{x\to 1} \ln x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}.$$

Por ser esta última expresión una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$, aplicamos una de las reglas de L'Hôpital y nos queda:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Luego, el límite buscado es e.

5. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Solución:

Esta es una expresión del tipo 1^∞. Por tanto:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}.$$

Usando propiedades de la función logaritmo tenemos que:

$$\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right).$$

Esta expresión es del tipo $\frac{0}{0}$ cuando $x \to 0$, aplicando la correspondiente regla de L'Hôpital tenemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{a^x+b^x}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x} = \frac{\ln a+\ln b}{2} = \ln\sqrt{ab}.$$

Finalmente, el límite buscado es $e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$.

6. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \frac{1}{2}.$

7. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x}.$

   Calculando aparte el límite del exponente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 1,$$

   tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+mx)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+mx) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{x} = m.$ Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}} = e^m.$$

Observación 3.4.24 1. El siguiente ejemplo ilustra que la regla de L'Hôpital no siempre tiene éxito. Sea $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ y $g(x) = x$, entonces $\frac{f(x)}{g(x)}$ toma la forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ cuando $x \to 0^+$. Pero,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{1} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2},$$

la cual nuevamente es una forma indeterminada cuando $x \to 0^+$. Derivando nuevamente, obtenemos:

$$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3}.$$

Después de derivar n veces el cuociente, se obtiene que

$$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{n!x^{n+1}}$$

que sigue siendo una forma indeterminada, por tanto en este caso la regla de L'Hôpital no soluciona el problema y se debe buscar otra vía.

3.4.6. Derivación logarítmica

La derivada de la función logaritmo natural o logaritmo en base e y la regla de la cadena facilitan el cálculo de las derivadas de ciertas expresiones en un proceso que suele llamarse **derivación logarítmica**. Cuando se tiene una expresión del tipo:

$$f(x) = u(x)^{v(x)}$$

conviene tomar el logaritmo natural en la ecuación, y nos queda:

$$\ln f(x) = v(x) \cdot \ln u(x)$$

Usando la regla de la cadena,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Despejando $f'(x)$ obtenemos:

$$\left[u(x)^{v(x)}\right]' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

Ejemplo 3.4.25

Si $y = x^x$ calcular y'. Usando derivación logarítmica tenemos:

$$\ln y = x \ln x, \;\text{ por tanto }\; \frac{y'}{y} = \ln x + 1.$$

Es decir,

$$y'(x) = x^x(\ln x + 1).$$

Si $y(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$, calcular $y'(x)$. Tomando logaritmo natural en la ecuación que define la función, tenemos:

$$\ln y(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Derivando, nos queda:

$$\frac{y'}{y} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}.$$

Por tanto:

$$y'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right].$$

Ejercicios resueltos

1. Determine el dominio y la derivada de las siguientes funciones

   a) $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{1 + e^{1/x}}$,

   b) $j(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$,

   c) $f(x) = \ln \operatorname{sen} x$.

   d) $f(x) = \ln \cos x$.

   e) $g(x) = 4^{1+x^2}$.

   Solución:

   a)
   - El dominio de la función $g(x)$ es $\mathbb{R} - \{0\}$
   - Su derivada es,

   $$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\cos(1/x)(-1/x^2)(1 + e^{1/x}) - \operatorname{sen}(1/x) \cdot (e^{1/x})(-1/x^2)}{(1 + e^{1/x})^2} \\ &= \frac{e^{1/x} \cdot \operatorname{sen}(1/x) - (1 + e^{1/x}) \cos(1/x)}{x^2(1 + e^{1/x})^2}. \end{aligned}$$

   b) Sea $j(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

   - $D(j) = \left\{x \in \mathbb{R} \, : \dfrac{1+x}{1-x} > 0\right\} =]-1, 1[$.

- $$\begin{aligned} j'(x) &= \frac{1}{\dfrac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{(1-x)-(1+x)(x)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \\ j'(x) &= \frac{2}{1-x^2} \end{aligned}$$

c) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$

- $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \ : \operatorname{sen} x > 0 \ \} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, (2l+1)\pi[\,.$
- $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotan} x.$

d)
- $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R};\ \cos x > 0\} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \,,\, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \right[$
- $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{1}{\cos x} \cdot (-\operatorname{sen} x) = -\tan x$

e)
- $D(g) = \mathbb{R}$, ya que la base es positiva.
- $g'(x) = (\ln 4)(2x)4^{1+x^2}$.

2. Bosquejar el gráfico de $f(x) = x \ln x$.
Solución:

- El dominio de f es $]0, \infty[$, pero como hemos visto en los ejercicios sobre la regla de L'Hôpital, $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$. Por tanto, podemos extender el dominio de esta función de modo de incluir el cero y sea continua en dicho punto. formalmente sto se hace definiendo una nueva función F tal que:

$$F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 \quad \text{si} & x = 0 \end{cases}$$

- $F(x) = 0 \iff x \ln x = 0 \iff (x = 1) \qquad \text{ó} \qquad (x = 0).$
- $F(x) > 0$ en $(1, \infty)$ y $F(x) < 0$ en $(0, 1)$.
- $F'(x) = \ln x + 1$, entonces $F'(x) = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = \dfrac{1}{e}.$

- $F'(x) < 0$ si $x \in (0, \frac{1}{e})$ y $F'(x) > 0$ si $x \in (\frac{1}{e}, \infty)$. Así el punto crítico es el único mínimo de la función.
- $F''(x) = \dfrac{1}{x}$, por consiguiente F'' es siempre positiva y la curva es convexa.
- $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln x = \infty$.
- Su menor valor es $F\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$.
- Su gráfico es:

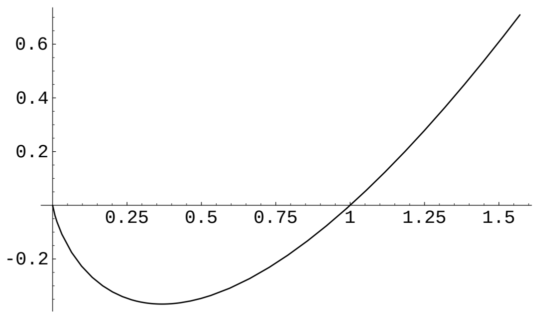


Figura 3.16: Gráfico de $x \ln x$

3. Bosquejar el gráfico de $f(x) = x^x$.
Solución:

- $D(f) = [0, \infty)$.
- La función es siempre positiva .

- $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$, por tanto,

$$f'(x) = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = \frac{1}{e}.$$

- $f'(x)$ es negativa en $(0, e^{-1})$ y es positiva en (e^{-1}, ∞) , por tanto tiene un único mínimo en $x = e^{-1}$.

- $f''(x) = x^x((\ln x)^2 + 2\ln x + \dfrac{1}{x} + 1)$.

$$f''(x) = 0 \iff (\ln x)^2 + 2\ln x + \frac{1}{x} + 1 = 0 \iff x(\ln x)^2 + 2x\ln x + x + 1 = 0.$$

  Pero como hemos visto en el ejercicio anterior el mínimo valor de $2x\ln x$ es $-\dfrac{2}{e} \approx -0,735..$; por tanto la última ecuación no tiene soluciones reales. Es decir, f'' es siempre positiva y la curva es convexa.

- Por lo visto en la subsección sobre la regla de L'Hôpital, la derivada a la derecha del cero de esta función es $-\infty$. Por tanto, su gráfico es:

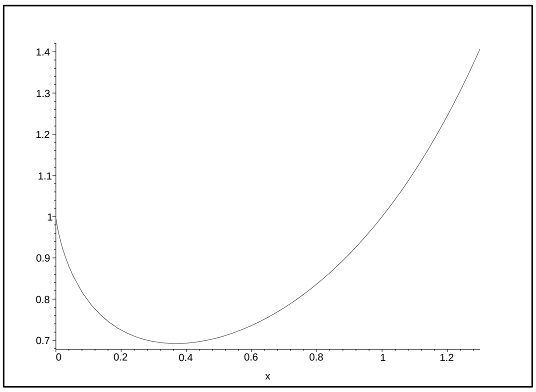


Figura 3.17: Gráfico de x^x

4. Bosquejar el gráfico de $g(x) = x^x(\ln x + 1)$.
Solución:

- $D(g) = (0, \infty)$.
- $g(x) = 0 \iff x = \dfrac{1}{e}$. Por lo visto en el ejercicio anterior.
- $g(x) < 0$ en $(0, \frac{1}{e})$ y $g(x) > 0$ en $(\frac{1}{e}, \infty)$.
- $g'(x) = x^x((\ln x)^2 + 2\ln x + \dfrac{1}{x} + 1)$. Nuevamente, por lo visto en el ejercicio anterior, sabemos que esta expresión es positiva para todo $x > 0$. Por lo cual la función g es estrictamente creciente.
- $$g''(x) = x^{x-2}\left[-1 + 3x + x^2 + 3x\ln x + 3x^2\ln x + 3x^2(\ln x)^2 + x^2(\ln x)^3\right].$$

  Analizar el signo de esta expresión es muy complicado, pero podemos saber si hay puntos de inflexión usando propiedades de las funciones continuas.

  $$g''(1) = 3, \quad \text{y} \quad g''\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}^{\frac{1}{e}-2} \approx -5{,}11;$$

  implica que entre $\dfrac{1}{e}$ y 1 existe un cero de g'' o lo que es lo mismo, un punto de inflexión de g. Pero podría haber otros puntos de inflexión.
  Para descartar esto tendríamos que demostrar que g''' es positiva para todo $x > 0$. Aunque efectivamente esto es así, en
  este caso no lo vamos a demostrar y lo dejamos como tarea para el lector.
- Como $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$ la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.
  Por tanto, su gráfico es:

5. Analice la existencia de máximos y mínimos de la curva dada por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x(t) &= \ln \operatorname{sen}(t/2) \\ y(t) &= \ln \operatorname{sen} t \ \ , t \in]0, \pi[\end{aligned}$$

Solución: Debemos buscar el valor del parámetro t donde $y'(x) = 0$.

$$(y(x(t)))' = y'(x(t)) \cdot x'(t)$$

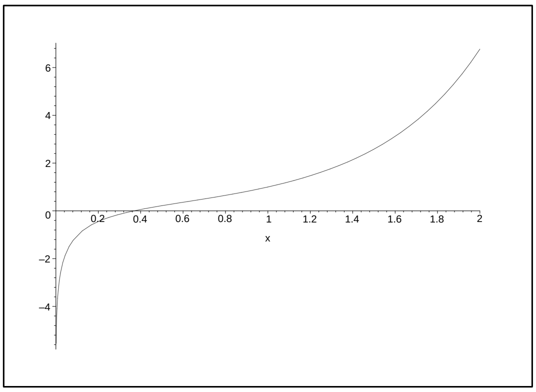


Figura 3.18: Gráfico de $x^x(\ln x + 1)$

Aplicando la función exponencial a la ecuaciòn que define $x(t)$, obtenemos que $e^x = \operatorname{sen}(t/2)$. Por otra parte, tenemos,

$$\ln\Big(\cos^2\frac{t}{2}\Big) = \ln(1-\operatorname{sen}^2(t/2)) = \ln(1-e^{2x}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y(t) &= \ln\operatorname{sen} t = \ln\Big(2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\Big) = \ln 2 + \ln\Big(\operatorname{sen}\frac{t}{2}\Big) + + \ln\Big(\cos\frac{t}{2}\Big) \\ &= \ln 2 + x + \frac{1}{2}\ln(1-e^{2x}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{2x}} \cdot -2e^{2x} 1 - \frac{e^{2x}}{1-e^{2x}} \\ &= \frac{1-e^{2x}-e^{2x}}{1-e^{2x}} = \frac{1-2e^{2x}}{1-e^{2x}}. \end{aligned}$$

$$y'(x) = 0 \iff = 2e^{2x} \iff 2x = -\ln 2 \iff x = -\frac{\ln 2}{2} = \ln\left(\Big(\frac{1}{2}\Big)^{1/2}\right).$$

Por lo tanto,

$$e^x = \Big(\frac{1}{2}\Big)^{1/2} = \operatorname{sen}\Big(\frac{t}{2}\Big) \iff t = 2\arcsin\left(\Big(\frac{1}{2}\Big)^{1/2}\right).$$

Así, en $t = 2\operatorname{arc\,sen}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}\right)$ ó $x = -\frac{\ln 2}{2}$ hay un punto crítico de $f(x) = y(x)$.
Como $y' = \frac{1-2e^{2x}}{1-e^{2x}}$
Se tiene que,

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{-2e^{2x}(2)(1-e^{2x}) - (1-2e^{2x})\dot{(}-2e^{2x})}{(1-e^{2x})^2} \\ &= \frac{-4e^{2x} + 4e^{4x} + 2e^{2x} - 4e^{4x}}{(1-e^{2x})^2} \\ &= \frac{-2e^{2x}}{(1-e^{2x})^2} \end{aligned}$$

$$\text{para } x = -\frac{\ln 2}{2}; \quad y'' = \frac{-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = -4.$$

Por lo tanto, en $x = -\frac{\ln 2}{2}$ la curva alcanza un máximo.

6. Demuestre que $\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = 1$.
Solución:

$$\begin{aligned} y = x^{\ln x} \Rightarrow \ln y &= \ln x \cdot x = (\ln(x^{-1})^{-1})x \\ &= -\ln(x^{-1})\cdot x = -\frac{\ln(1/x)}{(1/x)} \end{aligned}$$

Sea $z = \frac{1}{x}$ entonces $\lim_{x\to 0^+} z = \infty$.
Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{z\to\infty} -\frac{\ln z}{z} = 0 \Rightarrow \ln \lim_{x\to 0^+} y = 0.$$

Así, $\lim_{x\to 0^+} y(x) = 1$.

7. Demuestre que $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{-x}}{1 - x - \log_a(a-x)} = \frac{2a(\ln a)^2}{1 - a\ln a}$.

Solución: Aplicando la Regla de L'Hopital tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{a^x-a^{-x}}{1-x-\log_a(a-x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln a(a^x+a^{-x})}{-1-\dfrac{(-1)}{\ln a(a-x)}} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln a(a^x+a^{-x})}{1-(a-x)\ln a}\ln a(a-x) = \frac{\ln a\cdot 2\cdot a\ln a}{1-a\ln a} \\
&= \frac{2a(\ln a)^2}{1-a\ln a}.
\end{aligned}$$

8. Demuestre que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln \operatorname{sen} x}=1$.
Solución: Aplicando la Regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(\operatorname{sen} x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$\text{Como }\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(\operatorname{sen} x)}=1.$$

9. Demuestre que:

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$

Solución:

- Si $x\to+\infty$.
Sea $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. Esta función tiene por dominio

$$\left\{x:\ 1+\frac{1}{x}>0\right\},$$

es decir, $x>0$ y $x<-1$.
Sabemos que si en particular $x=n$, entonces por visto en la sección 1.2:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Para extender este límite para una variable continua, lo haremos por acotación. Si x no es un entero y, como nos interesan los valores grandes de x, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que,

$$m < x < m+1$$
$$\frac{1}{m} > \frac{1}{x} > \frac{1}{m+1}$$

y por tanto:

$$1+\frac{1}{m} > 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{m+1}$$

Como la función exponencial es estrictamente creciente cuando la base es mayor que 1, tenemos que,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^x > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^x$$

Pero como la función exponencial es creciente en el exponente, significa que para $b > 1$ y $m < x < m+1$ tenemos que $b^m < b^x < b^{m+1}$ Luego,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^x > f(x) > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^x > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m$$

Lo que equivale a tener que,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} > f(x) > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \left(1+\frac{1}{m}\right) > f(x) > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m+1}\right)}$$

Si $x \to \infty$ entonces $m \to \infty$ y

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \to e \qquad ; \left(1+\frac{1}{m}\right) \to 1$$

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} \to e \; ; \left(1+\frac{1}{m+1}\right) \to 1$$

Por tanto,

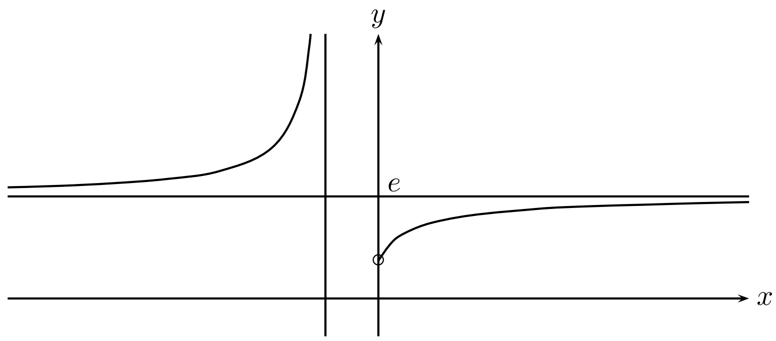
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

- Si $x \to -\infty$.
  Entonces $x = -|x|$ y podemos escribir:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - \frac{1}{|x|})^{-|x|} = (\frac{|x|}{|x|-1})^{|x|} \\ &= (1 + \frac{1}{|x|-1})^{|x|-1} \cdot (1 + \frac{1}{|x|-1}) \\ &= f(|x|-1)(1 + \frac{1}{|x|-1}) \end{aligned}$$

Si $x \to -\infty$, $|x| \to +\infty$, $1 + \dfrac{1}{|x|-1} \to 1$, y $f(|x|-1) \to e$, por lo demostrado en el item anterior.

Por tanto, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = e$.



10. *a*) Pruebe que si $f(x)$ es una función continua en un intervalo I de modo que $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$. Entonces, $f(x)$ es constante en I.

    b) Demuestre que si dos funciones tienen derivadas iguales, entonces ellas difieren en una constante.

    c) Dadas las funciones f y g tales que:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) \quad ; \quad g(x) = \arctan e^x.$$

Calcule $f'(x)$ y $g'(x)$. ¿Qué puede decir de ambas funciones ?

Solución:

a) Sean x_1, x_2 dos valores cualesquiera en el intervalo I, aplicando el teorema 2.3.5 (teorema del valor medio) en $[x_1, x_2]$, tenemos que existe un $c \in [x_1, x_2]$ tal que,

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1)f'(c).$$

Como $f'(c) = 0$, obtenemos que $f(x_2) = f(x_1)$, para todo $x_1, x_2 \in I$. Por tanto , podemos concluir que f es constante en I.

b) Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones tales que $f'(x) = g'(x)$ para todo x en algún intervalo I. Si definimos la función $h(x) = f(x) - g(x)$, entonces $h'(x) = 0$ para todo $x \in I$. Por la parte recién demostrada podemos concluir que $h(x)$ es constante en I; por tanto, las funciones f y g difieren en una constante.

c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) \\ &= \frac{(e^x+1)^2}{(e^x+1)^2+(e^x-1)^2}\cdot\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{2e^x}{2e^{2x}+2} \\ &= \frac{e^x}{e^{2x}+1} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$g'(x) = \frac{1}{1+(e^x)^2}\cdot\frac{d}{dx}e^x = \frac{e^x}{e^{2x}+1}.$$

Por tanto las funciones f y g difieren en una constante.

11. Demuestre que $\ln x < \sqrt{x}$ cuando $x > 0$.

Solución:

Sea $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}.$$

Así, $f'(x) = 0 \iff x = 4$. Si $0 < x < 4$, entonces $f'(x) > 0$. Si $x > 4$, entonces $f'(x) < 0$. Por tanto, $f(x)$ alcanza su máximo valor en $x = 4$ y es $f(4) = -2 + \ln 4$. Como $4 < e^2$ tenemos que $f(4) < \ln e^2 - 2 = 0$. Por consiguiente $f(x) < 0$ para todo $x > 0$, es decir, $\ln x < \sqrt{x}$.

12. Usando el teorema del valor medio, demuestre que $e^x \geq 1 + x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución: Sea $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto $f'(x) > 1$ si $x > 0$ y $f'(x) < 1$ si $x < 0$. Luego, aplicando el teorema del valor medio 2.3.5 con $a = 0$, $b = x$, tenemos

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^{x_0} > 1 \text{ para algún } x_0 \text{ tal que } \quad 0 < x_0 < x.$$

Por tanto, $e^x - 1 > x$, lo que implica $e^x > 1 + x$.

Si $x < 0$, supongamos en el teorema 2.3.5 $a = x$, $b = 0$, obteniendo:

$$\frac{1-e^x}{-x} = e^{x_0} < 1 \text{ para algún } x_0 \text{ tal que } \quad 0 > x_0 > x.$$

Por tanto, $1 - e^x < -x$ lo que implica $e^x > 1 + x$.

Entonces $e^x \geq 1 + x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y la igualdad se cumple en $x = 0$.

13. Dada la función $g(t) = e^{-t^2}$, se define:

$$F(x) = \int_{-100}^{x} g(t)dt \ \ , \ x \geq -100.$$

a) Calcule $F'(x),\ F''(x),\ F'''(x)$. Observe que todas ellas pueden ser escritas como el producto de un polinomio y de la función g.

b) Use inducción para demostrar que la derivada de orden n de F puede ser escrita como:

$$F^{(n)}(x) = p_{n-1}(x)g(x),$$

donde $p_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $n-1$.

c) Demuestre que F es una función continua y estrictamente creciente.

d) Demuestre que F es acotada en cualquier intervalo de la forma $[-100, a]$, donde a es un número fijo y $a \geq -100$.

Solución: Si $g(t) = e^{-t^2}$, entonces $F(x) = \displaystyle\int_{-100}^{x} g(x)dt$, $x \geq -100$. En particular, $F(-100) = 0$.

a) $F'(x) = g(x) = e^{-x^2}$.
$F''(x) = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2} = -2xg(x)$.

$$\begin{aligned}
F'''(x) &= -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot (-2x) = -2g(x) + 4x^2g(x) \\
&= -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = -2g(x) + 4x^2g(x) \\
&= (-2 + 4x^2)g(x) = p_2(x) \cdot g(x). \\
F^{(iv)}(x) &= p_2'(x) \cdot g(x) + p_2(x) \cdot g'(x) = \\
&= p_2'(x) \cdot g(x) - 2xp_2(x)g(x) \\
&= p_3(x) \cdot g(x).
\end{aligned}$$

b) Supongamos que $F^n(x) = p_{n-1}(x) \cdot g(x)$. Demostraremos que la propiedad vale para $n+1$.

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(x) &= (F^{(n)})'(x) = p'_{n-1}(x)g(x) + p_{n-1}(x) \cdot g'(x) \\ &= p'_{n-1}(x) - 2xp_{n-1}(x) \cdot g(x) = p_n(x) \cdot g(x). \end{aligned}$$

c) Como g es derivable , entonces F es continua y como $F'(x) = g(x)$ es positiva para todo x, podemos concluir que $F(x)$ es estrictamente creciente.

d) En el ítem anterior vimos que F es continua, por tanto, en virtud del Teorema de Weierstrass 1.5.18, es acotada en cualquier intervalo cerrado y acotado.

Ejercicios propuestos

1. Determine el dominio y la derivada de las siguientes funciones

   a) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$,

   b) $h(x) = \dfrac{1}{e^x - e^{-x}}$,

   c) $k(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-2^x}}{x}$.

   d) $f(x) = \ln \ln x$.

   e) $f(x) = \ln |x|$.

   f) $f(x) = \ln \cos x$.

   g) $f(x) = \ln x^4$.

   h) $f(x) = 4 \ln x$.

   i) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$.

   j) $f(x) = (\cos x)^x$.

   k) $f(x) = (1 + \dfrac{1}{x})^x$.

   l) $f(x) = 4^{x^2-3x}$.

   m) $f(x) = \dfrac{1+x^2+x^3}{1+x^3}\, e^x$.

2. Calcule $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{x - \int_0^x e^{-t^2} dt}{x - \operatorname{sen} x}$

3. Analice el comportamiento de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

   b) $g(x) = \ln \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$.

   c) $f(x) = \ln(x - \sqrt{1 - x^2})$.

   d) $g(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$.

   e) $h(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

4. ¿Para qué valor de a y en qué punto la recta $y = x$ es tangente a la curva logarítmica $y = \log_a x$?

5. Demuestre que $f(x) = x^2 \ln x$ satisface la ecuación diferencial $2f(x) - xf'(x) + x^2 = 0$.

6. Demuestre que la función e^x crece más rápidamente que cualquier polinomio$p(x)$, es decir, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{p(x)} = \infty$.

7. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

8. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ en el punto $(x_0, y_0) = \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

9. Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\dfrac{1}{x^2}} = e^{-\dfrac{1}{6}}$.

10. Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)^x = 1$.

11. Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{2x \ln x}\right) = \dfrac{1}{6}$.

12. Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$.

13. Demuestre que $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}$.

14. Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = 1$.

15. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3 - 3^x}{x^3 - 3^3} = 1 - \ln 3.$

16. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - 1}{\ln x} = 1.$

17. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - x + 1}{x - x^x} = \dfrac{1}{2}.$

18. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x} = 1.$

19. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln \operatorname{senh} x}} = e.$

20. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^x - 1} = 1.$

21. La vida media del radium es 1620 años. Si una muestra contiene 15 gramos de radium inicialmente, ¿Cuánto contendrá 150 años más tarde?

Capítulo 4

La integral indefinida: cálculo de primitivas

Según lo visto en el capítulo 3, sección 3.3, la Regla de Barrow, que es una consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo, permite evaluar integrales encontrando explícitamente una función cuya derivada sea la función que se quiere integrar. Esto no siempre es fácil, a veces ni siquiera es posible. En este capítulo se mostrarán los métodos más conocidos para evaluar integrales.

4.1. La integral indefinida y sus propiedades

4.1.1. La integral indefinida

Definición 4.1.1 Se dice que la función F es una **función primitiva o antiderivada** de una función f definida en un intervalo abierto I (finito o infinito) si

$$F'(x) = f(x), \text{ para todo } x \in I. \tag{4.1}$$

Ejemplo 4.1.2

1. La función $F(x) = x^2$ es una función primitiva o antiderivada de $f(x) = 2x$, en $I = (-\infty, +\infty)$, pues $F'(x) = 2x = f(x)$.
2. La función $F(x) = x^2 + 4$ es también una función primitiva o antiderivada de $f(x) = 2x$, en $I = (-\infty, +\infty)$, pues $F'(x) = 2x = f(x)$.
3. La función $F(x) = \operatorname{sen} x$ es una función primitiva o antiderivada de $f(x) = \cos x$, en $I = (-\infty, +\infty)$, pues $F'(x) = \cos x = f(x)$.
4. La función $F(x) = e^x$ es una función primitiva o antiderivada de $f(x) = e^x$, en $I = (-\infty, +\infty)$, pues $F'(x) = e^x = f(x)$.

Definición 4.1.3 Si una función f está definida en un intervalo cerrado $I = [a, b]$, la función F se dice una función primitiva o antiderivada de f si

$$F'(x) = f(x), \text{ para todo } x \in (a, b), \lim_{x \to a^+} F'(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x \to b^-} F'(x) = f(b).$$

En los ejemplos 1 y 2 de 4.1.2 hemos visto que la función primitiva de una función f no es única; esto de debe a que la derivada de una función constante es cero. Esta propiedad es la que expresa el siguiente teorema.

Teorema 4.1.4 Si dos funciones F y G son funciones primitivas o antiderivadas de una función f en un intervalo I (cerrado o abierto), entonces estas dos funciones difieren en una constante.

Demostración: Si F y G son funciones primitivas o antiderivadas de f entonces,

$$F'(x) = G'(x) = f(x).$$

Así, aplicando el ejercicio resuelto 1 parte $1b$ de la subsección 2.3.3, tenemos que F y G difieren en una constante. $\blacksquare$

El teorema 4.1.4, puede también ser aplicado diciendo que dada una primitiva F de una función f, $F(x) + C$ es también una primitiva de f y es la forma general de una primitiva de f.

Como vimos en el cápitulo 3, el Teorema Fundamental del Cálculo, asegura que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces, la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds,$$

es una función derivable, y $F'(x) = f(x)$, para cada $x \in [a, b]$. Esto es, F es una primitiva de f. Del teorema 4.1.4 concluimos que todas las primitivas posibles de la función f se escriben de la forma:

$$G_C(x) = \int_a^x f(s)ds + C = F(x) + C.$$

En la teoría de integración es común denotar por:

$$\int f(s)ds$$

la primitiva $F(x) + c$ y llamarla la integral indefinida de f.

Definición 4.1.5 Dada una función f denotaremos por

$$\int f(s)\,ds,$$

a cualquier función de la forma $F(x)+C$,que satisface $F'(x)=f(x)$. y la llamaremos la **Integral Indefinida** de f. Esto se escribe:

$$\int f(x)dx = F(x)+C \tag{4.2}$$

Observación 4.1.6 1. En la definición 4.1.5 no se especifica ningún intervalo, deberá sobreentenderse que se trata de un intervalo cualquiera en que la función f esté definida.

2. La relación 4.2 puede escribirse de la forma:

$$\frac{d}{d\,x}\int f(x)\,dx = f(x) \tag{4.3}$$

$$\int \frac{d}{d\,x}F(x)\,dx = F(x)+C. \tag{4.4}$$

El cálculo de la integral indefinida de una función f se llama **integración de la función f**, las fórmulas (4.3) y (4.4), nos dicen que la integración y la derivación de una función son operaciones inversas.

3. Geométricamente, sabemos que la derivada soluciona el problema de encontrar la pendiente de la recta tangente a una curva dada, en un punto de esta. Es decir, dada la curva $y=f(x)$ la pendiente de su recta tangente en $(x,f(x))$ es $m(x)=f'(x)$. Recíprocamente, la integral indefinida es encontrar una curva de la cual se conocen las pendientes de las rectas tangentes. Esto es, dada $m(x)$ la pendiente de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto (x,y), se tiene que $f(x)=\displaystyle\int m(u)\,du+C$.

4. De la definición 4.1.1 tenemos que toda fórmula de derivación da origen a una fórmula de integración. Por ejemplo,

$$\frac{d}{d\,x}\operatorname{sen} x = \cos x \iff \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C.$$

Por esta vía podemos obtener una primera tabla de fórmulas básicas de integración.

4.1.2. Fórmulas básicas de integración

1. $\displaystyle\int 0\,dx = C,$

2. $\displaystyle\int a\,dx = ax + C,$

3. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C,$

4. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C,$

5. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C,$

6. $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \tan\ x + C,$

7. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotan}\ x + C,$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$

9. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C,$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\ sen} x + C,$

11. $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos\ x + C,$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\ tg} x + C,$

13. $\displaystyle\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\ cotg} x + C,$

14. $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}\,x^{a+1} + C,$ si $a \neq -1$ y $x > 0$.

15. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$

16. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\, dx = \cosh x + C.$

17. $\displaystyle\int \cosh x\, dx = \operatorname{senh} x + C.$

18. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x}\, dx = -\operatorname{cotanh} x + C.$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x}\, dx = \tanh x + C.$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \operatorname{arcsenh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \operatorname{arccosh} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) + C, \quad |x| > 1.$

22. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctanh} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + C; & |x| < 1 \\ \operatorname{arccotanh} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1} + C; & |x| > 1. \end{cases}$

Observación 4.1.7 Si el dominio de x para el cual se satisface la ecuación $F'(x) = f(x)$ no es un intervalo, entonces no es verdad que la fórmula $F(x) + C$ dé todas las primitivas de f, como puede verse en el siguiente ejemplo.

La función $\ln|x| + C$ da todas las primitivas de $\frac{1}{x}$ en $(-\infty, 0)$ ó en $(0, +\infty)$ separadamente, pero **no** en $(-\infty, +\infty) - \{0\}$. Pues, si consideramos la función

$$G(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{si} \quad x < 0 \\ \ln x + 1 & \text{si} \quad x > 0\ , \end{cases}$$

esta es una primitiva de $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, que no viene dada por la fórmula $\ln|x| + C$.

Teorema 4.1.8 Sean I un intervalo , $x_0 \in I$ e y_0 un número real cualquiera. Si una función f tiene una función primitiva en I, entonces existe una y sólo una función primitiva F tal que $F(x_0) = y_0$.

Demostración:

Sea $G(x)$ una función primitiva cualquiera de $f(x)$ en el intervalo I.

Definiendo $F(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$, vemos que $F'(x) = G'(x) = f(x)$ y $F(x_0) = y_0$. Por lo cual F es una primitiva de f que satisface la condición del enunciado del teorema.

Demostraremos a continuación que F es única. Como dos primitivas difieren sólo en una constante, cualquiera otra primitiva F^* tiene la forma $F^* = F + C$, con $C \neq 0$. Así, $F^*(x_0) = F(x_0) + C = y_0 + C \neq y_0$. Lo cual no puede ser, por lo tanto, se tiene la unicidad . ■

4.1.3. Propiedades elementales de la integral indefinida

Teorema 4.1.9
1. $\displaystyle\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$
2. $\displaystyle\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$
3. **Fórmula de integración por partes.**
$\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$
4. **Fórmula de integración por substitución.**
$\displaystyle\int g(f(x))f'(x)\,dx = \int g(y)\,dy.$

Demostración:

1. Como $\displaystyle\frac{d}{d\,x}\left[\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right] = \frac{d}{d\,x}\int f(x)\,dx + \frac{d}{d\,x}\int g(x)\,dx = f(x)+g(x).$
Se tiene que $\displaystyle\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$
2. $\displaystyle\frac{d}{d\,x}\left[a\int f(x)\,dx\right] = a\frac{d}{d\,x}\int f(x)\,dx = a\,f(x)$, implica que $\displaystyle\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$
3. $\displaystyle\frac{d}{d\,x}\left[f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\right] = \frac{d}{d\,x}[f(x)g(x)] - \frac{d}{d\,x}\left[\int f'(x)g(x)\,dx\right] =$
$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x).$
4. Sea $G(y) = \displaystyle\int g(y)\,dy$ e $y = f(x)$. Entonces, usando la regla de la cadena tenemos,
$$\frac{d}{d\,x}[G(y)] = \frac{d}{d\,x}[G(f(x))] = G'(f(x))\cdot f'(x) = g(f(x))f'(x).$$
Entonces, $\displaystyle\int g(f(x))f'(x)\,dx = \int g(y)\,dy.$

■

Ejemplo 4.1.10 1. De las fórmulas básicas tenemos que
$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

En particular,

$$\begin{aligned} \int 1\,dx &= x + C \\ \int x^2\,dx &= \frac{x^3}{3} + C \\ \int x^3\,dx &= \frac{x^4}{4} + C. \end{aligned}$$

2. De la propiedad 2 del teorema 4.1.9 podemos deducir

$$\int 5x^3\,dx = 5\int x^3\,dx = \frac{5}{4}x^4 + C.$$

$$\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx = x^3 + C.$$

3.

$$\int (5x^3 + 3x^2 + 8)\,dx = \int 5x^3\,dx + \int 3x^2\,dx + \int 8\,dx = \frac{5}{4}x^4 + x^3 + 8x + C.$$

4.

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{4x^3 - 2x + 1}{x^3}\right) dx &= \int \left(4 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx \\ &= \int 4\,dx - \int \frac{2}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x^3}\,dx + C \\ &= \int 4\,dx - \int 2x^{-2}\,dx + \int x^{-3}\,dx + C \\ &= 4x - \frac{2x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2} + C \\ &= 4x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + C. \end{aligned}$$

5.

$$\int 4\sqrt{x}\,dx = \int 4x^{\frac{1}{2}}\,dx = 4\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$$

6.

$$\int x\sqrt[5]{x}\,dx = \int xx^{\frac{1}{5}}\,dx = \int x^{\frac{6}{5}}\,dx = \frac{x^{\frac{6}{5}+1}}{\frac{6}{5}+1} + C = \frac{5}{11}x^{\frac{11}{5}} + C = \frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}} + C.$$

7.
$$\int \frac{1}{x^3\sqrt[4]{x}}\,dx = \int x^{-\frac{13}{4}}\,dx = \frac{x^{-\frac{13}{4}+1}}{-\frac{13}{4}+1} + C = -\frac{4}{9}x^{-\frac{9}{4}} + C = -\frac{4}{9}\frac{1}{x^2\sqrt[4]{x}} + C.$$

8. $\displaystyle\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$. Ver fórmula 15.

9.
$$\begin{aligned}\int \left(\frac{4x^3 - 2x\sqrt[3]{x} + 8x4^x + 1}{x}\right)dx &= \int \left(4x^2 - 2\sqrt[3]{x} + 8\cdot 4^x + \frac{1}{x}\right)dx\\ &= \frac{4}{3}x^3 - \frac{6}{4}x\sqrt[3]{x} + \frac{8\cdot 4^x}{\ln 4} + \ln|x| + C.\end{aligned}$$

Los siguientes ejemplos son aplicaciones simples de la fórmula de integración por partes que se utiliza para integrar productos.

10. $I = \displaystyle\int xe^x\,dx.$

Haciendo $f(x) = x$ y $g'(x) = e^x$, tenemos: $f'(x) = 1$ y $g(x) = e^x$. Por lo tanto,
$$I = xe^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C.$$

11. $I = \displaystyle\int x\cos x\,dx.$

Haciendo $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos x$, tenemos: $f'(x) = 1$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Por lo tanto,
$$I = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x - (-\cos x) + C = x\operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

12. $I = \displaystyle\int \ln x\,dx.$

Haciendo $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = 1$, tenemos: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = x$. Por lo tanto,
$$I = x\ln x - \int \frac{1}{x}x\,dx = x\ln x - x + C.$$

13. $I = \displaystyle\int e^x\cos x\,dx.$

Haciendo $f(x) = e^x$ y $g'(x) = \cos x$, tenemos: $f'(x) = e^x$ y $g(x) = -\operatorname{sen} x$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= -e^x \operatorname{sen} x - \int e^x(-\operatorname{sen} x)\,dx \\ &= -e^x \operatorname{sen} x + \int e^x \operatorname{sen} x\,dx \\ &= -e^x \operatorname{sen} x + J. \end{aligned}$$

La integral J debe calcularse nuevamente por integración por partes. Sea $f(x) = e^x$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x) = e^x$ y $g(x) = \cos x$. Por lo tanto,

$$J = e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx = e^x\ \cos x - I.$$

Reemplazando el valor de I en J nos queda:

$$\begin{aligned} J &= e^x \cos x - (-e^x \operatorname{sen}\ x + J) \\ &= e^x \cos x + e^x \operatorname{sen}\ x - \\ 2J &= e^x \cos x + e^x \operatorname{sen}\ x \\ J &= \frac{e^x \cos x + e^x \operatorname{sen}\ x}{2}, \quad \text{y por consiguiente} \\ I &= \frac{e^x \cos x - e^x \operatorname{sen}\ x}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplos de integración por substitución

14. $I = \displaystyle\int (a+bx)^n\,dx,\ n \neq -1,\ b \neq 0.$

Escribiendo $y = a + bx$, entonces $x = \dfrac{y-a}{b}$, y por tanto, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{b}$. Así,

$$I = \int y^n \frac{dy}{b} = \frac{1}{b}\int y^n dy = \frac{1}{b}\frac{y^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C.$$

15. $I = \displaystyle\int \frac{1}{a+bx}\,dx.$

Haciendo la misma substitución anterior:

$$I = \int \frac{1}{y}\frac{dy}{b} = \frac{1}{b}\ln|y| + C = \frac{1}{b}\ln|a+bx| + C.$$

16. $I = \displaystyle\int \operatorname{sen} ax\, dx.$

Haciendo $y = ax$, entonces $x = \dfrac{y}{a}$, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{a}$.

$$I = \int \operatorname{sen} y \,\frac{dy}{a} = \frac{1}{a}\int \operatorname{sen} y\, dy = \frac{1}{a}(-\cos y) + C = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$$

17. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}}$, $a > 0$.

Escribiendo $x = \sqrt{a}\, y$; $\dfrac{dx}{dy} = \sqrt{a}$, entonces

$$I = \int \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-ay^2}}\, dy = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{arc\,sen} y + C = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{\sqrt{a}} + C.$$

18. $I = \displaystyle\int \tan\ x\, dx.$

Como $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, I puede escribirse como

$$I = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx.$$

Haciendo $y = \cos x$, $\dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} x$, tenemos

$$I = \int -\frac{dy}{y} = -\ln|y| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

19. $I = \displaystyle\int \operatorname{cosec} x\, dx$. Usando la fórmula trigonométrica $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$, podemos escribir

$$I = \int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{dx}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \int \frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Haciendo la substitución $\tan\dfrac{x}{2} = y$, $\dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = dy$, obtenemos:

$$I = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C.$$

20. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx.$

Haciendo $\ln x = t$, obtenemos

$$I = \int \cos t\, dt = \operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\ln x) + C.$$

21. $\displaystyle\int (a^{2x} + 3\,a^x - 7)\, dx.$

Haciendo $a^x = t$, tenemos que:

$$I = \frac{1}{\ln a}\int (t+3-7t^{-1})\, dt = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{t^2}{2} + 3t - 7\ \ln t\right)+C = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{2}a^{2x} + 3a^x - 7x\ \ln a\right)+C.$$

22. $\displaystyle I = \int \text{arc sen}\, x\, dx.$

Usando integración por partes, tenemos que si

$$f(x) = \text{arc sen}\ x,\ g'(x) = 1,\ \text{entonces}\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ g(x) = x.$$

Por lo tanto,

$$I = x\ \text{arc sen}\ x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

La integral $\displaystyle J = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ se calcula por substitución haciendo $u^2 = 1 - x^2,\ 2u\dfrac{du}{dx} = -2x.$

$$J = \int -\frac{u\, du}{u} = -\int du = -u = -\sqrt{1-x^2}.$$

Por tanto,

$$I = x\ \text{arc sen}\ x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

23. $\displaystyle\int \frac{6x-2}{3x^2-2x+1}\, dx.$

Haciendo $y = 3x^2 - 2x + 1,\ \dfrac{dy}{dx} = 6x - 2$, tenemos:

$$I = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln|3x^2 - 2x + 1| + C.$$

24. $I = \displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^3-1}}\, dx.$

I puede escribirse como

$$I = \int \frac{x^2}{x^3\sqrt{x^3-1}}\, dx$$

y haciendo $y = \sqrt{x^3-1}$ tenemos que $y^2 = x^3 - 1$, $2y\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$, y por lo tanto,

$$I = \frac{2}{3}\int \frac{ydy}{(y^2+1)y} = \frac{2}{3}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{2}{3}\,\text{arc tg}\, y + C = \frac{2}{3}\text{arctg}\sqrt{x^3-1} + C.$$

25. $I = \displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 \pm x^2}}.$

Sea $y = 1 \pm x^2$, $dy = \pm 2xdx$, entonces

$$I = \int \pm\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \pm\int \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy = \pm y^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{1 \pm x^2} + C.$$

26. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{1 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|1 \pm x^2| + C.$

Lo que se obtiene haciendo la misma substitución del ejemplo anterior.

27. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{(1 \pm x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)(x^2 \pm 1)^{n-1}} + C, \quad n \neq 1.$

Es una generalización del ejemplo 26

4.1.4. Ejercicios propuestos

Calcule las siguientes integrales y compruebe los resultados mediante derivación

1. $\displaystyle\int (3x^4 - 8x^2 + 2x)\, dx = \frac{3}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + x^2 + C.$

2. $\displaystyle\int (10x^{\frac{3}{4}} - 4x^{-\frac{2}{3}})\, dx = \frac{40}{7}x^{\frac{7}{4}} - 12x^{\frac{1}{3}} + C.$

3. $\displaystyle\int \sqrt{4x-3}\, dx = \frac{1}{6}(4x-3)^{3/2} + C.$

4. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-5}\, dx = \frac{1}{3}(x^2-5)^{3/2} + C.$

5. $\displaystyle\int 3^{2x-1}\, dx = \frac{1}{2\ln 3}3^{(2x-1)} + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{7x+2}\,dx = \frac{1}{7}\ln(7x+2) + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{x}{9-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(-9+x^2) + C.$

8. $\displaystyle\int (-2x+1)^4\,dx = -\frac{1}{10}(-2x+1)^5 + C.$

9. $\displaystyle\int (x-2)^{-3}\,dx = -\frac{1}{2}(x-2)^{-2} + C.$

10. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\,(8x+5)\,dx = -\frac{1}{8}\cos(8x+5) + C.$

11. $\displaystyle\int \cos(1-4x)\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(-1+4x) + C.$

12. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}\,(x^2-3)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2-3) + C.$

13. $\displaystyle\int x^2\,\cos(x^3-1)\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(x^3-1) + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$

15. $\displaystyle\int \tan(2x+1)\,dx = \frac{1}{4}\ln\big(2+2\tan^2(2x+1)\big) + C.$

16. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}(10-4x)\,dx = \frac{1}{4}\ln\big[\operatorname{cosec}(-10+4x) + \operatorname{cotan}\,(-10+4x)\big] + C.$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln(x^3-1) + C.$

18. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$

19. $\displaystyle\int x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

20. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\ln x\Big)^2 + C.$

21. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\arctan x\Big)^2 + C.$

22. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\,dx = \ln|\arctan x| + C.$

23. $\displaystyle\int x\;\operatorname{sen}\,x\,dx = \operatorname{sen} x - x\cos x + C.$

24. $\displaystyle\int e^{ax}\operatorname{sen} x\,dx = -\frac{e^{ax}\cos x}{a^2+1} + \frac{ae^{ax}\operatorname{sen} x}{a^2+1} + C.$

25. $\displaystyle\int e^{ax}\cos x\,dx = \frac{e^{ax}\operatorname{sen} x}{a^2+1} + \frac{ae^{ax}\cos x}{a^2+1} + C.$

26. $\displaystyle\int x^a \ln x\,dx = -\frac{xe^{a\ln x}}{1+2a+a^2} + \frac{x\ln x e^{a\ln x}}{1+a} + C.$

27. $\displaystyle\int x^2\;\cos x\,dx = x^2\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} x + 2x\cos x + C.$

4.2. Fórmulas de reducción

Reciben este nombre las fórmulas que permiten calcular integrales del tipo $I_n = \displaystyle\int f_n(x)\,dx$ conociendo la integral I_1 o I_0 y reduciendo la integral I_n a una que involucra a I_{n-1} u otra anterior.

1. $I_n = \displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\,dx\ ;\ n \in \mathbb{N}.$

   Esta integral puede escribirse como

$$I_n = \int \operatorname{sen}^{n-1} x\operatorname{sen} x\,dx$$

   e integrarse por partes tomando $f(x) = \operatorname{sen}^{n-1}x,\ g'(x) = \operatorname{sen} x.$
   Así, $f'(x) = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}x\cos x,\ g(x) = -\cos x.$
   Por tanto,

$$\begin{aligned}
I_n &= -\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x + \int (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}x\cos x\cos x\,dx \\
&= -\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x(1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx \\
&= -\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx \\
&= -\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx - (n-1)I_n.
\end{aligned}$$

Despejando I_n, nos queda:

$$\begin{aligned} nI_n &= -\text{sen}^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2}\,x\,dx \\ I_n &= -\frac{\text{sen}^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n}\int \text{sen}^{n-2}\,x\,dx. \end{aligned}$$

Esto nos dice que la integral de $\text{sen}^n x$ depende de la integral de $\text{sen}^{n-2}\,x$, es decir,

$$I_n = -\frac{\text{sen}^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n}I_{n-2}. \tag{4.5}$$

Naturalmente, la fórmula 4.5 tiene sentido cuando $n \geq 2$.

Aplicando la fórmula 4.5 a $n-2$ tenemos que:

$$I_{n-2} = -\frac{\text{sen}^{n-3}x\cos x}{n-2} + \frac{(n-3)}{n-2}I_{n-4},$$

y así sucesivamente hasta llegar a I_1 si n es impar o a I_0 cuando n es par.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \text{sen}x\,dx = -\cos x \\ I_0 &= \int dx = x. \end{aligned}$$

En particular, si $n=6$, tenemos:

$$\begin{aligned} I_6 &= \int \text{sen}^6 x\,dx = -\frac{\text{sen}^5 x\cos x}{6} + \frac{5}{6}I_4 \\ I_4 &= -\frac{\text{sen}^3 x\cos x}{4} + \frac{3}{4}I_2 \\ I_6 &= -\frac{\text{sen}^5 x\cos x}{6} - \frac{5}{6\cdot 4}\text{sen}^3 x\cos x + \frac{5\cdot 3}{6\cdot 4}I_2 \\ I_6 &= -\frac{\text{sen}^5 x\cos x}{6} - \frac{5}{6\cdot 4}\text{sen}^3 x\cos x + \frac{5\cdot 3}{6\cdot 4}\left[-\frac{\text{sen}x\cos x}{2} + \frac{1}{2}I_0\right] \\ I_6 &= -\frac{\text{sen}^5 x\cos x}{6} - \frac{5}{6\cdot 4}\text{sen}^3 x\cos x - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\text{sen}x\cos x + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}x + C. \end{aligned}$$

2. $I_{-k} = \displaystyle\int \text{sen}^{-k}\,x\,dx,\ k \in \mathbb{N}.$

De la fórmula 4.5 tenemos:

$$I_{n-2} = \frac{n}{n-1} I_n + \frac{\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x}{n-1}.$$

Escribiendo $n-2=-k$, nos queda

$$I_{-k} = -\frac{\cos x \operatorname{sen}^{-k+1} x}{k-1} + \frac{k-2}{k-1} I_{-k+2}.$$

Lo que nos permite escribir:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^k x} = -\frac{\cos x}{(k-1)\operatorname{sen}^{k-1} x} + \frac{k-2}{k-1}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{k-2} x}. \tag{4.6}$$

Veamos algunos casos particulares.

Si $k=1$,

$$I_{-1} = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

Comparar este resultado, obtenido por esta vía, con el ejemplo 4.1.10 parte 19.

Si $k=2$,

$$I_{-2} = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + C = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Si $k=3$,

$$I_{-3} = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx = -\frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{2} I_{-1} = -\frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

Con un procedimiento análogo se obtienen las fórmulas:

3. $I_n = \int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{(n-1)}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx.$

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}. \tag{4.7}$$

4. $I_n = \int \sec^n x\, dx$

$$I_n = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x\ \tan x + \frac{(n-2)}{n-1} I_{n-2}. \tag{4.8}$$

5. $I_n = \int \operatorname{cosec}^n x\, dx$

$$I_n = -\frac{1}{n-1}\operatorname{cosec}^{n-2} x \operatorname{cotan} x + \frac{(n-2)}{n-1} I_{n-2}. \tag{4.9}$$

6. $I_n = \int \tan^n x\, dx$

$$I_n = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2}. \tag{4.10}$$

7. $I_n = \int x^n \text{sen } x\, dx$

$$I_n = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\, dx. \tag{4.11}$$

8. $I_n = \int x^n \cos x\, dx$

$$I_n = x^n \text{ sen } x - n\int x^{n-1}\text{sen } x\, dx. \tag{4.12}$$

9. $I_n = \int x^n e^{-x}\, dx \quad n \in \mathbb{N}.$

$$I_n = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}. \tag{4.13}$$

En particular,

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int e^{-x}\, dx = -e^{-x} + C.\\
I_1 &= -xe^{-x} + I_0 = -xe^{-x} - e^{-x} + C.\\
I_2 &= -x^2e^{-x} + 2I_1 = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C.\\
I_3 &= -x^3e^{-x} + 3I_2 = -x^3e^{-x} + 3[-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}] + C.\\
&= -e^{-x}\left[x^3 + 3x^2 + 3\cdot 2x + 3\cdot 2\right] + C\\
&= -3!\; e^{-x}\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right] + C.
\end{aligned}$$

En general se tiene:

$$\int x^n e^{-x}\, dx = -n!e^{-x}\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right] + C.$$

10. $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$

Si $n = 1$, entonces $I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x + C.$

Si $n > 1$, entonces

$$I_n = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\, dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\, dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\, dx = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\, dx.$$

La segunda integral se calcula mediante integración por partes.
Haciendo $f(x) = x,\ g'(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$, tenemos: $f'(x) = 1,\ g(x) = \displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx = -\frac{1}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}}$. Así,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx &= -\frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}\\ &= -\frac{x}{2(n+1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}\end{aligned}$$

En consecuencia obtenemos la fórmula de reducción:

$$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1},$$

que después de reducir términos semejantes nos queda:

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}. \tag{4.14}$$

En particular:

$$\begin{aligned}I_2 &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}I_1 + C\\ &= \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\text{arc tg}\ x + C.\\ I_3 &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}I_2\\ &= \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8}\text{arc tg}\ x + C.\end{aligned}$$

11. $I_n = \int (\ln x)^n\,dx$.

$$I_n = x(\ln x)^n - nI_{n-1}. \tag{4.15}$$

12. $I_n = \int x^a(\ln x)^n\,dx$.

$$I_n = \frac{x^{a+1}(\ln x)^n}{a+1} - \frac{n}{a+1}I_{n-1}, \quad a \neq -1. \tag{4.16}$$

13. $I_{m,\,n} = \int \text{sen}^m x \cos^n x\,dx, \quad m, n \in \mathbb{N}$.

$$I_{m,n} = \frac{\text{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}I_{m,\,n-2}. \tag{4.17}$$

Observe que esta fórmula contiene a las fórmulas 4.5 y 4.7

4.2.1. Ejercicios propuestos

Calcule las siguientes integrales

1. $\int \operatorname{sen}^5 x\, dx = -\frac{1}{5}\operatorname{sen}^4 x \cos x - \frac{4}{15}\operatorname{sen}^2 x \cos x - \frac{8}{15}\cos x + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}\, dx = \frac{1}{3}\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} - \frac{2}{3}\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + C.$

3. $\int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{3}{8}\cos x \operatorname{sen} x + \frac{3}{8}x + C.$

4. $\int \cos^5 x\, dx = \frac{1}{5}\cos^4 x \operatorname{sen} x + \frac{4}{15}\operatorname{sen} x \cos^2 x + \frac{8}{15}\operatorname{sen} x + C.$

5. $\int \operatorname{cosec}^3 x\, dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{sen^2 x} + \frac{1}{2}\ln(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotan} x) + C.$

6. $\int \sec^4 x\, dx = \frac{1}{3}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + C.$

7. $\int \tan^6 x\, dx = \frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x - x + C.$

8. $\int x^4 \operatorname{sen} x\, dx = -x^4 \cos x + 4x^3 \operatorname{sen} x + 12x^2 \cos x - 24\cos x - 24x \operatorname{sen} x + C..$

9. $\int x^3 \cos x\, dx = x^3 \operatorname{sen} x + 3x^2 \cos x - 6\cos x - 6x \operatorname{sen} x + C.$

10. $\int x^5 e^{-x}\, dx = -x^5 e^{-x} - 5x^4 e^{-x} - 20x^3 e^{-x} - 60x^2 e^{-x} - 120x e^{-x} - 120 e^{-x} + C.$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^4}\, dx = \frac{1}{6}\frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{5}{24}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{5}{16}\frac{x}{1+x^2} + \frac{5}{16}\arctan x + C.$

12. $\int (\ln x)^2\, dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.$

13. $\int (\ln(3x-1))^3\, dx = \frac{1}{3}(3x-1)\ln(3x-1)^3 - (3x-1)\ln(3x-1)^2 + 2(3x-1)\ln(3x-1) - 6x + 2 + C.$

14. $\displaystyle\int x^2 (\ln x)^5\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x^5 - \frac{5}{9}x^3 \ln x^4 + \frac{20}{27}x^3 \ln x^2 + \frac{40}{81}x^3 \ln x - \frac{40}{243}x^3 + C.$

15. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx = -\frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 x \cos^3 x - \frac{2}{15}\cos^3 x + C..$

16. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\, dx = -\frac{1}{7}\operatorname{sen}^3 x \cos^4 x - \frac{3}{35}\cos^4 x \operatorname{sen} x + \frac{1}{35}\cos^2 x \operatorname{sen} x + \frac{2}{35}\operatorname{sen} x + C..$

17. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \, dx = -\dfrac{1}{8} \operatorname{sen}^3 x \cos^5 x - \dfrac{1}{16} \operatorname{sen} x \cos^5 x + \dfrac{1}{64} \cos^3 x \operatorname{sen} x + \dfrac{3}{128} \cos x \operatorname{sen} x + \dfrac{3x}{128} + C.$.

4.3. Integración de funciones racionales

Recordemos que una función racional $R(x)$ es un cuociente de polonomios, $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Para integrar este tipo de polinomios estudiaremos su descomposición en fracciones parciales simples, generalizando lo hecho en el ejercicio 13 de la sección 1.2.

4.3.1. Descomposición de un polinomio en factores

El Teorema Fundamental del Álgebra dice que un polinomio $Q(x)$ con coeficientes reales y grado n tiene n raíces en el cuerpo de los números complejos C. Esto permite descomponer $Q(x)$ en producto de factores lineales para las raíces reales y de factores cuadráticos no reducibles en $\mathbb{R}$ para las raíces complejas conjugadas.

$$Q(x) = (x - r_1)^{n_1} \ldots (x - r_j)^{n_j} (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^{m_1} \ldots (a_k x^2 + b_k x + c_k)^{m_k},$$

donde, $n_1 + \ldots + n_j + m_1 + \ldots + m_k = n =$ grado de $Q(x)$.

Ejemplo 4.3.1 1. $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$.

2. $x^2 + 2$, es irreducible en $\mathbb{R}$, pues sus raíces son $\pm i\sqrt{2}$.
3. $x^4 + 3x^2 - 2x^2 + 6x - 8 = (x-1)(x+4)(x^2+2)$.
4. $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = (x+3)(x^2+x+1)$. El polinomio cuadrático (x^2+x+1) tiene raíces complejas conjugadas $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, por lo tanto, es irreducible en $\mathbb{R}$.
5. $x^4 - 1 = (x^2+1)(x-1)(x+1)$.

4.3.2. Descomposición de una función racional en fracciones simples o parciales

Sea $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios. Si el grado del numerador es igual o mayor que el denominador, entonces, realizando la división de polinomios obtenemos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{G(x)}{Q(x)},$$

donde, $F(x)$ y $G(x)$ son polinomios tal que el grado de $G(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

Ejemplo 4.3.2 1. $\dfrac{x^2+3x-4}{x-1} = (x+4)$. En este caso $G(x)=0$.

2. $\dfrac{7x^3+4x^2-2x+5}{x^2-1} = 7x+4+\dfrac{5x+9}{x^2-1}$.

3. $\dfrac{x^3+2}{x^2+3x+2} = x-3+\dfrac{7x+8}{x^2+3x+2}$.

Teorema 4.3.3 Sea $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios con coeficientes reales y tales que $Q(x)$ puede descomponerse en la forma

$$Q(x) = (x-r_1)^{n_1}\dots(x-r_j)^{n_j}(a_1x^2+b_1x+c_1)^{m_1}\dots(a_kx^2+b_kx+c_k)^{m_k},$$

$P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes y el el grado del numerador es menor que el del denominador, entonces $R(x)$ puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned}
R(x) &= \frac{A}{(x-r_1)^{n_1}} + \frac{B}{(x-r_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{C}{(x-r_1)} \\
&+ \frac{D}{(x-r_2)^{n_2}} + \frac{E}{(x-r_2)^{n_2-1}} + \dots\dots\dots + \frac{F}{(x-r_2)} \\
&+ \dots\dots + \\
&+ \frac{Gx+H}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^{m_1}} + \frac{Ix+K}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{Lx+M}{a_1x^2+b_1x+c_1} \\
&+ \dots\dots\dots + \\
&= \frac{Nx+P}{(a_kx^2+b_kx+c_k)^{m_k}} + \frac{Qx+R}{(a_kx^2+b_kx+c_k)^{m_k-1}} + \dots + \frac{Sx+T}{a_kx^2+b_kx+c_k},
\end{aligned}$$

para todo x tal que $Q(x)\neq 0$; y donde $A, B, C, \dots,$ son constantes reales.

Para encontrar las constantes $A, B, C, \dots,$ se debe realizar la suma de fracciones del segundo miembro cuyo mínimo común múltiplo es $Q(x)$, y se obtiene que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)}, \tag{4.18}$$

donde $S(x)$ involucra los coefiecientes desconocidos $A, B, C, \dots,$. De la ecuación (4.18) se obtiene que

$$P(x) = S(x).$$

Usando que dos polinomios son iguales si los respectivos coeficientes de las potencias de x son iguales, se obtienen las ecuaciones cuyas soluciones dan los valores de $A, B, C, \dots,$.

Ejemplo 4.3.4 1. $\dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$ es una función racional cuyo denominador tiene grado mayor que que el grado del numerador. Por otro lado, $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$. Por lo tanto, los polinonios que forman la función racional no tienen factores comunes, así, podemos aplicar el teorema 4.3.3.

$$\frac{3x-5}{x^2-4x+3}=\frac{3x-5}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x-3)}{(x-3)(x-1)}.$$

Igualando los numeradores tenemos:

$$\begin{aligned}3x-5 &= A(x-1)+B(x-3)\\ &= Ax-A+Bx-3B\\ &= (A+B)x-(A+3B).\end{aligned}$$

Por la igualdad de polinomios obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned}A+B&=3\\ A+3B&=5.\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos los valores $A=2$ y $B=1$. Por consiguiente,

$$\frac{3x-5}{x^2-4x+3}=\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x-1}.$$

2. $\dfrac{x^5+8x^2-x+1}{x^3-4x^2+x+6}$.
Como en este caso el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, primero debemos realizar la división de polinomios.

$$\frac{x^5+8x^2-x+1}{x^3-4x^2+x+6}=(x^2+4x+15)+\frac{58x^2-40x-89}{x^3-4x^2+x+6}.$$

$x^3-4x^2+x+6=(x+1)(x-2)(x-3)$ y no tiene factores comunes con $58x^2-40x-89$.

$$\begin{aligned}\frac{58x^2-40x-89}{x^3-4x^2+x+6} &= \frac{58x^2-40x-89}{x^3-4x^2+x+6}\\ &= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}\\ &= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+1)(x-2)}.\end{aligned}$$

Así,

$$58x^2-40x-89=A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2). \qquad (4.19)$$

Ahora podemos proceder como en el caso anterior, pero podemos hacerlo por camino más rápido **que vale solamente cuando todas las raíces del denominador son reales y simples**.

Como la expresión (4.19) vale para todo $x \in \mathbb{R}$, en particular vale cuando $x = -1$ lo que nos da $9 = 12A$, despejando A tenemos $A = \dfrac{9}{12}$. Haciendo $x = 2$ obtenemos el valor $B = 21$, finalmente, Tomando $x = 3$ podemos encontrar $C = \dfrac{313}{8}$.

$$\frac{58x^2 - 40x - 89}{x^3 - 4x^2 + x + 6} = \frac{9}{12(x+1)} + \frac{21}{x-2} + \frac{313}{8(x-3)}.$$

3. Sea $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)}$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)} &= \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2+1} \\ &= \frac{A(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}.\end{aligned}$$

Igualando numeradores nos queda:

$$x^2 + 2x + 3 = A(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2,$$

lo que implica la igualdad

$$x^2 + 2x + 3 = (B + C)x^3 + (A - B - 2C + D)x^2 + (B + C - 2D)x + (A - B + D),$$

Esto nos conduce al sistema

$$\begin{aligned} B + C &= 0 \\ A - B - 2C + D &= 1 \\ B + C - 2D &= 2 \\ A - B + D &= 3, \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $A = 3,\ B = -1,\ C = 1,\ D = -1$. Así la descomposición de $R(x)$ es

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+1}.$$

4. Sea $R(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-2)(x^2+2)^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{(x-2)(x^2+2)^2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{(x^2+2)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+2} \\ &= \frac{A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x-2) + (Dx+E)(x-2)(x^2+2)}{(x-2)(x^2+2)^2}. \end{aligned}$$

Igualando numeradores nos queda el sistema:

$$\begin{aligned} A + D &= 0 \\ -2D + E &= 0 \\ 4A + B + 2D - 2E &= 1 \\ -2B + C - 4D + 2E &= 0 \\ 4A - 2C - 4E &= 1, \end{aligned}$$

que tiene solución: $A = \dfrac{5}{56},\ B = \dfrac{1}{6},\ C = \dfrac{1}{3},\ D = -\dfrac{5}{36},\ E = -\dfrac{5}{18}$.

4.3.3. Integración de funciones racionales

Desarrollando una función racional en fracciones simples o parciales, la integral de dicha función se transforma en una suma de integrales del tipo:

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx,$

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx,\ n \neq -1,$

3. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx,$ cuando ax^2+bx+c no tiene raíces reales.

Todas ellas son fáciles de obtener:

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C,$

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C,\ n \neq -1\ ; a > 0,$

Para calcular $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$, procederemos a completar el cuadrado del binomio en el denominador:

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} \tag{4.20}$$

Sea z una variable tal que:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac-b^2}{4a}z^2. \tag{4.21}$$

Despejando x obtenemos:

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{ac-b^2}}{2a}z. \; ; a>0 \tag{4.22}$$

De (4.20) y (4.21), tenemos:

$$ax^2+bx+c = \left[\frac{4ac-b^2}{4a}\right](z^2+1).$$

Así, usando la substitución (4.22) nos queda

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \int \frac{Cz+D}{(z^2+1)^n}\,dz \\ = C\int \frac{z}{(z^2+1)^n}\,dz + D\int \frac{1}{(z^2+1)^n}\,dz.\end{aligned}$$

Donde A, B, C, D son constantes.

La primera de ellas , según el ejemplo 4.1.10, números 26 y 27 nos da:

$$\begin{aligned}\frac{C}{2}\frac{1}{(n-1)(z^2+1)^{n-1}} + C^* \text{ si } n\neq 1, \\ \frac{C}{2}\ln|z^2+1| + C^* \text{ si } n=1.\end{aligned}$$

La segunda se calcula usando la fórmula de reducción 4.14.

Ejemplo 4.3.5 1. Calcule $I = \int \frac{x+1}{3x^2+6x+9}\,dx$.

Como, $3x^2+6x+9 = 3[x^2+2x+3] = 3\left[(x+1)^2+2\right] = 3(x+1)^2+6$.

Haciendo $3(x+1)^2 = 6z^2$, se tiene que $x=\sqrt{2}\,z-1$.

Entonces, $3x^2+6x+9 = 6(z^2+1)$, $dx = \sqrt{2}\,dz$.

Así,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{3x^2+6x+9}\,dx &= \int \frac{\sqrt{2}z}{6(z^2+1)}\sqrt{2}\,dz \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{z}{z^2+1}\,dz \\
&= \frac{1}{6}\ln(z^2+1)+C. \\
&= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{3x^2+6x+9}{6}\right)+C \\
&= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{x^2+2x+3}{2}\right)+C.
\end{aligned}$$

2. Calcule $I = \displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2+x+1}\,dx$.

$x^2+x+1 = \left(x^2+x+\dfrac{1}{4}\right) = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$.

Haciendo $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}z^2$, se tiene que $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}z-\dfrac{1}{2}$, $dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,dz$, $x^2+x+1 = \dfrac{3}{4}[z^2+1]$.

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{(\frac{3\sqrt{3}}{2}z-\frac{3}{2}-2)}{\frac{3}{4}(z^2+1)}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,dz \\
&= \int \frac{9z-7\sqrt{3}}{3(z^2+1)}\,dz \\
&= 3\int \frac{z}{z^2+1}\,dz - \frac{7\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{z^2+1}\,dz \\
&= \frac{3}{2}\ln(z^2+1) - \frac{7\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} z + C \\
&= \frac{3}{2}\ln\left(\frac{4(x^2+x+1)}{3}\right) - \frac{7\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.
\end{aligned}$$

Ejercicios resueltos

Calcule las siguientes integrales de funciones racionales:

1. $I = \displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2-4x+3}\,dx$.

Solución: Usando la descomposición hecha en el ejemplo 4.3.4 parte 1 tenemos que,

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x-1} \right) dx = 2\int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{dx}{x-1} \\ &= 2\ln|x-3| + \ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

2. $I = \displaystyle\int \frac{x^5 + 8x^2 - x + 1}{x^3 - 4x^2 + x + 6}\, dx.$

Solución: En virtud del ejemplo 4.3.4 parte 2, tenemos que

$$\begin{aligned} I &= \int \left[x^2 + 4x + 15 + \frac{58x^2 + 8x + 91}{x^3 - 4x^2 + x + 6} \right] dx \\ &= \int \left[x^2 + 4x + 15 + \frac{47}{4(x+1)} + \frac{113}{x-2} + \frac{637}{4(x-3)} \right] dx \\ &= \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 15x + \frac{47}{4} \ln|x+1| + 113\ln|x-2| + \frac{637}{4} \ln|x-3| + C. \end{aligned}$$

3. $I = \displaystyle\int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)}\, dx.$

Solución: Según parte 3 del ejemplo 4.3.4

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{(x-1)^2}\, dx - \int \frac{1}{x-1}\, dx + \int \frac{x-1}{x^2+1}\, dx \\ &= -\frac{3}{x-1} - \ln|x-1| + \int \frac{x}{x^2+1}\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx \\ &= -\frac{3}{x-1} - \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arc\,tg} x + C. \end{aligned}$$

4. $I = \displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{(x-2)(x^2+2)^2}\, dx.$

Solución: De acuerdo a la parte 4 del ejemplo 4.3.4,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{5}{36(x-2)}\, dx + \int \frac{x+2}{6(x^2+2)^2}\, dx + \int \frac{-5x-10}{36(x^2+2)}\, dx \\ &= \frac{5}{36}\ln|x-2| - \frac{1}{12(x^2+2)} + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x^2+2)^2}\, dx - \frac{5}{72}\ln|x^2+2| - \frac{5}{18}\int \frac{1}{x^2+2}\, dx + C. \end{aligned}$$

Según las fórmulas de reducción 4.14 y el ejercicio propuesto **??** de la sección 5.2:

$$\int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{4(x^2+2)} + C.$$

Según el ejercicio propuesto 18 de la sección 5.1:

$$\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

5. $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx \;\; x \neq 1.$

Solución:

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Igualando los numeradores obtenemos $1 = A(x^2+x+1) + (x-1)(Bx+C)$, lo que implica

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A - B + C &= 0 \\ A - C &= 1. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos los valores:

$$A = \frac{1}{3},\; B = -\frac{1}{3},\; C = -\frac{2}{3}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(x-1)}\,dx + \int \frac{-x-2}{3(x^2+x+1)}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx. \end{aligned}$$

Para calcular la segunda integral completaremos el cuadrado correspondiente.

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

lo que nos lleva a hacer

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}z - \frac{1}{2},\;\; dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dz.$$

Así,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{(\sqrt{3}z+1)\sqrt{3}}{\frac{3}{4}[z^2+1]}\,dz \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{3z+\sqrt{3}}{z^2+1}\,dz \\
&= \frac{1}{2}\ln|z^2+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\text{arc tg}z + C \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\text{arc tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.
\end{aligned}
$$

Finalmente podemos escribir I.

$$I = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

6. $I = \int \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx.$

Solución: Haciendo $y = \sqrt{1+e^x}$, tenemos que $y^2 = 1+e^x$, $2ydy = e^x dx$. Por lo tanto,

$$I = \int \frac{1}{y^2-1}\,dy.$$

Ahora debemos utilizar la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1},$$

lo que implica $A(y+1)+B(y-1) = 1$ y que nos da los valores

$$A = \frac{1}{2},\ \ B = -\frac{1}{2}.$$

Por consiguiente,

$$I = \int \frac{1}{y-1}\,dy - \int \frac{1}{y+1}\,dy = \ln|y-1| - \ln|y+1| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C.$$

Ejercicios propuestos

Calcule las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{4}{x-5}\,dx = 4\ln(x-5)+C$

2. $\displaystyle\int \frac{20}{7-x}\,dx = -20\ln(7-x)+C$

3. $\displaystyle\int \frac{4}{(x-5)^2}\,dx = -\frac{4}{x-5}+C$

4. $\displaystyle\int \frac{20}{(7-x)^5}\,dx = \frac{5}{(7-x)^4}+C$

5. $\displaystyle\int \frac{2x+43}{x^2+x-12}\,dx = -5\ln(x+4)+7\ln(x-3)+C$

6. $\displaystyle\int \frac{4x-5}{x^2-4x+20}\,dx = 2\ln(x^2-4x+20)+\frac{3}{4}\arctan\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\right)+C$

7. $\displaystyle\int \frac{4x-7}{x^2+6x+9}\,dx = \frac{19}{x+3}+4\ln(x+3)+C$

8. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+3x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+3x+3)-\frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+3)\Big)+C$

9. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x^2+3x+3)^2}\,dx = -\frac{1}{3}\Big(\frac{8x+15}{x^2+3x+3}\Big)-\frac{16\sqrt{3}}{9}\arctan\Big(\frac{(2x+3)\sqrt{3}}{3}\Big)+C$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x+4)}\,dx = \frac{1}{6}\left(\ln(x-2)-\ln(x+4)\right)+C$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx = \frac{1}{6}\Big(\ln x-\ln(x+3)\Big)+\frac{1}{2}\Big(\ln(x+2)-\ln(x+1)\Big)+C$

12. $\displaystyle\int \frac{3x^3-17x^2+21x-43}{x^2-8x+15}\,dx = \frac{3}{2}x^2+7x+26\ln(x-3)+6\ln(x-5)+C$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx = \frac{1}{x}-\ln x+\ln(x-1)+C$

14. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x-8}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x+4)+\frac{1}{2}\ln(x-2)+C$

15. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x-2)^2}\,dx = -\frac{4}{5}\frac{1}{(x-2)}+\frac{4}{25}\ln(x-2)-\frac{2}{25}\ln(x^2+1)-\frac{3}{25}\arctan x+C$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^4}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctanh} x+\frac{1}{2}\arctan x+C$

17. $\displaystyle\int \frac{1}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\arctan x - \frac{\sqrt{3}}{12}\ln(x^2-\sqrt{3}x+1) + \frac{1}{6}\arctan(2x-\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{12}\ln(x^2+$ $x\sqrt{3}+1) + \frac{1}{6}\arctan(2x+\sqrt{3}) + C.$
Indicacion: $x^6+1 = (x^2+1)(x^2-\sqrt{3}\,x+1)(x^2+\sqrt{3}\,x+1)$.

18. $\displaystyle\int \frac{1}{x^6-1}\,dx = \frac{1}{6}\ln(x-1) - \frac{1}{12}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\Big) - \frac{1}{6}\ln(x+$ $1) + \frac{1}{12}\ln(x^2-x+1) + C$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(1-x^2)^2}\,dx. = -\frac{1}{x} - \frac{1}{4(x-1)} - \frac{3}{4}\ln(x-1) - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{3}{4}\ln(x+1) + C$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+4}{(x^2-1)(x+2)}\,dx = \frac{2}{3}\ln(x-1) - 3\ln(x+1) + \frac{10}{3}\ln(x+2) + C$

21. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+2)(x+3)^2}\,dx = -2\ln(x+2) - \frac{3}{(x+3)} + 2\ln(x+3) + C$

4.4. Integración de algunas funciones algebraicas

4.4.1. Integración de funciones irracionales simples

Cuando la variable $x, ax+b$ o $\dfrac{ax+b}{a'x+b'}$ aparece elevada a diferentes potencias fraccionarias, es conveniente usar la substitución $y = \sqrt[q]{x}$ donde q es el mínimo común denominador de los exponentes de las potencias de $x, ax+b$ o $\dfrac{ax+b}{ax'+b'}$ según sea el caso. Esta nueva variable permite eliminar los exponentes fraccionarios como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.4.1 1. $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx.$

Haciendo $y = \sqrt[6]{x}$, se tiene $x = y^6$ y por tanto, $dx = 6y^5dy$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{6y^7dy}{2y^3(1+y^2)} = 3\int \frac{y^4dy}{1+y^2} = 3\int \frac{(y^4-1+1)dy}{1+y^2} \\
&= 3\int \frac{y^4-1}{y^2+1}dy + 3\int \frac{1}{1+y^2}dy \\
&= 3\int (y^2-1)dy + 3\int \tfrac{1}{1+y^2}dy \\
&= 3(\tfrac{y^3}{3} - y) + 3\arctan y + C \\
&= \sqrt{x} - 3\sqrt[6]{x} + 3\arctan\sqrt[6]{x} + C
\end{aligned}
$$

2. $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$

Haciendo $y = \sqrt[12]{x}$, tenemos que $x = y^{12}$ y $dx = 12y^{11}dy$.

$$
\begin{aligned}
\int \tfrac{12y^{11}dy}{y^4-y^3} &= 12\int \tfrac{y^8}{y-1}dy \\
&= 12\int \tfrac{(y^8-1)+1}{y-1}dy \\
&= 12\int \tfrac{y^8-1}{y-1}dy + 12\int \tfrac{1}{y-1}dy.
\end{aligned}
$$

Usando la fórmula de factorización

$$y^p - 1 = (y-1)(y^{p-1} + y^{p-2} + \cdots + y + 1)\ ,$$

obtenemos:

$$
\begin{aligned}
I &= 12\int (y^7+y^6+y^5+y^4+y^3+y^2+y+1)dy + 12\int \tfrac{1}{y-1}dy \\
&= 12\left[\tfrac{y^8}{8} + \tfrac{y^7}{7} + \cdots + \tfrac{y^2}{2} + y + \ln(y-1)\right] + C \\
&= \tfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + \tfrac{12}{7}x^{\frac{7}{12}} + \cdots + 6x^{\frac{1}{6}} + 12x^{\frac{1}{12}} + 12\ln|x^{\frac{1}{12}} - 1| + C
\end{aligned}
$$

3. $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{3x-1}}$

$\sqrt{3x-1} = y$ implica $x = \frac{y^2+1}{3}$, $dx = \frac{2ydy}{3}$. Así,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2dy}{y^2+1} = 2\arctan\ y + C \\ &= 2\arctan\ \sqrt{3x-1} + C \end{aligned}$$

4. $I = \displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{3x+1}}dx$

escribiendo $y = \sqrt{\frac{x-2}{3x+1}}$, implica $y^2 = \frac{x-2}{3x+1}$ y $2ydy = \frac{7}{(3x+1)^2}dx$ y por lo tanto, $x = \frac{y^2+2}{1-3y^2}$, y $3x+1 = \frac{7}{1-3y^2}$. Así,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(1-3y^2)}{y^2+2} \cdot \frac{y \cdot 2y}{7} \cdot \frac{7^2}{(1-3y)^2}dy \\ &= 7\int \frac{2y^2dy}{(y^2+2)(1-3y^2)}. \end{aligned}$$

Esta integral se calcula usando el método de descomposición en fracciones parciales.

4.4.2. Integración de $f(x) = x^p(ax^n+b)^q$ $p, q, n \in \mathbb{Q}$.

La integral $I = \int f(x)dx$ puede transformarse en una integral de una función racional si uno de los números q, $\dfrac{p+1}{n}$, $\dfrac{p+1}{n} + q$ es entero. En efecto:

- Si q es un entero, entonces $f(x)$ se integra como hemos visto en el párrafo anterior.
- Si q es un racional no entero, emplearemos la substitución:

$$y = x^n, \qquad dy = nx^{n-1}dx$$

Si $y > 0$, entonces

$$\begin{aligned} I = \int x^p(ax^n+b)^q dx &= \frac{1}{n}\int y^{\frac{p+1}{n}-1}(ay+b)^q dy \\ &= \frac{1}{n}\int y^{\frac{p+1}{n}+q-1}\left(\frac{ay+b}{y}\right)^q dy \end{aligned}$$

- Si $\dfrac{p+1}{n} \in \mathbb{Z}$ y $q = \frac{\alpha}{\beta}$, con $(\alpha, \beta) = 1$, la integral I se transforma en una integral de una función racional usando la substitución:

$$t^\beta = ay + b.$$

- Si $\dfrac{p+1}{n} + q \in \mathbb{Z}$, se usa la substitución $t^\beta = \dfrac{ay+b}{y}$

Ejemplo 4.4.2 1. $I = \int \sqrt{x}(\sqrt[3]{x} - 4)^2 dx$.

En esta integral $q \in \mathbb{Z}$ entonces,

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{x}(\sqrt[3]{x^2} - 8\sqrt[3]{x} + 16)dx \\
&= \int (x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} - 8x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} + 16x^{\frac{1}{2}})dx \\
&= \int (x^{\frac{7}{6}} - 8x^{\frac{5}{6}} + 16x^{\frac{1}{2}})dx \\
&= \frac{x^{\frac{7}{6}+1}}{\frac{7}{6}+1} - \frac{8x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1} + \frac{16x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} - \frac{48}{11}x^{\frac{11}{6}} + \frac{32}{3}x^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}$$

2. $I = \int x^3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$.

En este caso particular,

$p = 3,\ n = 2,\ q = \dfrac{3}{2}$ entonces, haciendo $y = x^2$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
I &= \tfrac{1}{2}\int y^{2+\frac{3}{2}-1}\left(\tfrac{-y+1}{y}\right)^{\frac{3}{2}} dy \\
&= \tfrac{1}{2}\int y^{\frac{5}{2}}\left(\tfrac{1-y}{y}\right)^{\frac{3}{2}} dy.
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{p+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$, usaremos la substitución

$$\begin{aligned}
t^2 &= 1 - y \\
2tdt &= -dy.
\end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{2}\int (1-t^2)^{\frac{5}{2}}\frac{(t^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}(-2tdt) = -\int (1-t^2)t^4 dt$$

$$= \int (t^2-1)t^4 dt = \int (t^6 - t^4)dt = \tfrac{t^7}{7} - \tfrac{t^5}{5} + C$$

Como $t = \sqrt{1-x^2}$;

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{(\sqrt{1-x^2})^7}{7} - \tfrac{(\sqrt{1-x^2})^5}{5} + C \\ &= \sqrt{1-x^2}\left[\tfrac{(1-x^2)^3}{7} - \tfrac{(1-x^2)^2}{5}\right] + C \\ &= \sqrt{1-x^2}\left[\tfrac{1-3x^2+3x^4-x^6}{7} - \tfrac{1-2x^2+x^4}{5}\right] + C \\ &= -\tfrac{1}{7}\sqrt{1-x^2}[x^6 - \tfrac{8}{5}x^4 + \tfrac{1}{5}x^2 + \tfrac{2}{5}] + C \end{aligned}$$

3. $I = \int x^{\frac{1}{2}}(x^3-1)^{-\frac{3}{2}}dx$. Como
   $p = \frac{1}{2},\ \ n = 3\ \ q = -\frac{3}{2},\ \frac{p+1}{n} = \frac{1}{2},\ \ \frac{p+1}{n} + q = -1 \in \mathbb{Z}$,
   estamos en el tercer caso.
   Si $y = x^3$, entonces, $dy = 3x^2dy$, y por lo tanto,

$$I = \frac{1}{3}\int y^0\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-\frac{3}{2}} dy = \frac{1}{3}\int\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-\frac{3}{2}} dy.$$

   Haciendo $t^2 = \frac{y-1}{y}$, tenemos que $2tdt = \frac{dy}{y^2}$; $y = \frac{1}{1-t^2}$

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{1}{3}\int t^{-3}2t\tfrac{1}{(1-t^2)^2}dt \\ &= \tfrac{2}{3}\int \tfrac{1}{t^2(1-t^2)^2}dt. \end{aligned}$$

   Esta integral se calcula usando la descomposición en fracciones simples o parciales y resulta (ver ejercicio propuesto 19):

$$I = -\frac{1}{x} - \frac{x}{2(x^2-1)} - \frac{3\ \ln(x-1)}{4} + \frac{3\ \ln(x+1)}{4} + C.$$

4.4.3. Integración de funciones racionales que involucran polinomios en x y raíces cuadradas de ax^2+bx+c

Estas integrales se reducen a la integral de una función racional en la variable z, mediante una substitución adecuada:

- Si $a > 0$

  Haciendo $z = \sqrt{ax^2+bx+c} - x\sqrt{a}$ tenemos que

$$ax^2+bx+c = ax^2 + 2x\sqrt{a}z + z^2,$$

lo que implica

$$bx + c = 2x\sqrt{a}z + z^2$$

despejando x nos queda:

$$\begin{aligned} x &= \frac{z^2-c}{b-2\sqrt{a}z} \\ dx &= 2\frac{-\sqrt{a}z^2+bz-\sqrt{a}c}{(b-2\sqrt{a}z)^2}dz \end{aligned}$$

Además:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + z = \frac{-\sqrt{a}z^2+bz-\sqrt{a}c}{b-2\sqrt{a}z}$$

Ejemplo 4.4.3 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+1}}$. En este ejemplo $a = 1 > 0$:

Sea $z = \sqrt{x^2-3x+1} - x$, de donde

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{z^2-1}{-3-2z}; \\ dx &= 2\tfrac{-z^2-3z-1}{(-3-2z)^2}dz \\ &= \tfrac{-2(z^2+3z+1)}{(3+2z)^2}dz \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\sqrt{x^2-3x+1} = \frac{-z^2-3z-1}{-3-2z} = \frac{z^2+3z+1}{3+2z} \tag{4.24}$$

Así,

$$\begin{aligned} I &= \int \tfrac{-2(z^2+3z+1)}{(3+2z)^2} \cdot \tfrac{(3+2z)}{z^2+3z+1} dz \\ &= \int \tfrac{-2dz}{3+2z} = -\ln|3+2z| + C \\ &= -\ln|3 + 2\sqrt{x^2-3x+1} - 2x| + C \end{aligned}$$

De (4.23) y (4.24) vemos que una integral que involucra polinomios en x y $\sqrt{ax^2+bx+c}$, se convierte en una función racional en z.

- Si $c \geq 0$:

Haciendo $z = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$, tenemos

$$ax^2+bx+c = x^2z^2 + 2xz\sqrt{c} + c,$$

lo que implica:

$$ax + b = xz^2 + 2z\sqrt{c}$$

Así,

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2z\sqrt{c}-b}{a-z^2} \\ dx &= 2\frac{\sqrt{c}z^2 - bz + a\sqrt{c}}{(a-z^2)^2}dz \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xz + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}z^2 - bz + a\sqrt{c}}{(a-z^2)} \tag{4.26}$$

De (4.25) y (4.26) vemos que una integral que involucra polinomios en x y $\sqrt{ax^2+bx+c}$, se convierte en una función racional en z.

Ejemplo 4.4.4 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$. Tenemos que $c = 3 > 0$:

Haciendo $z = \dfrac{\sqrt{-x^2+2x+3}-\sqrt{3}}{x}$, obtenemos:

$$x = \frac{2\sqrt{3}z-2}{-1-z^2} = \frac{2(1-\sqrt{3})z}{z^2+1}$$

$$dx = 2\frac{\sqrt{3}z^2-2z-\sqrt{3}}{(z^2+1)^2}dz$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = -\frac{(\sqrt{3}z^2-2z-\sqrt{3})}{(z^2+1)}$$

Por lo tanto,

$$I = \int 2\frac{\sqrt{3}z^2-2z-\sqrt{3}}{(z^2+1)^2} \cdot \frac{-(z^2+1)}{\sqrt{3}z^2-2z-\sqrt{3}}dz$$

$$I = \int \frac{2dz}{z^2+1} = -2\arctan\ z + c$$

$$= -2\arctan\left(\frac{\sqrt{-x^2+2x+3}-\sqrt{3}}{x}\right) + C$$

- Si $b^2-4ac > 0$.

  En este caso, el polinomio ax^2+bx+c tiene dos raíces reales y distintas r_1, r_2, por lo cual podemos escribir:

  $$ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2).$$

  Introduciendo la variable z tal que satisfaga la igualdad:

  $$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-r_1)(x-r_2)} = z(x-r_1) \qquad (*)$$

  tenemos que

  $$a(x-r_1)(x-r_2) = z^2(x-r_1)^2,$$

  es decir:

  $$a(x-r_2) = z^2(x-r_1).$$

  Despejando x obtenemos:

  $$x = \frac{ar_2-r_1z^2}{a-z^2}, \qquad dx = \frac{2a(r_1-r_2)z}{(a-z^2)^2}dz$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(r_2-r_1)z}{a-z^2}.$$

Estas últimas igualdades nos permiten concluir que una integral de una función racional en x y $\sqrt{ax^2+bx+c}$, se transforma mediante la substitución (*) en una integral de una función racional en z.

Ejemplo 4.4.5 $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+2x-4}}$

$b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) - 36 > 0$

$2x^2 + 2x - 4 = 2(x^2 + x - 2) = 2(x+2)(x-1)$

Sea z tal que $\sqrt{2x^2+2x-4} = z(x+2)$, entonces

$$x = \frac{2+2z^2}{2-z^2}; \qquad dx = \frac{4 \cdot 3z}{(2-z^2)^2} dz$$

$$\sqrt{2x^2+2x-4} = \frac{6z}{2-z^2}.$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \tfrac{2-z^2}{6z} \cdot \tfrac{-12z}{(2-z^2)} dz \\
&= -2\int \tfrac{dz}{2-z^2} = 2\int \tfrac{dz}{z^2-2} = 2\int \tfrac{dz}{(z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})} \\
&= 2\int \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \tfrac{1}{z-\sqrt{2}} - 2\int \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \tfrac{1}{z+\sqrt{2}} \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \ln|z-\sqrt{2}| - \tfrac{1}{\sqrt{2}} \ln|z+\sqrt{2}| + C \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \ln|\tfrac{\sqrt{2x^2+2x-4}}{x+2} - \sqrt{2}| + \tfrac{1}{\sqrt{2}} \ln|\tfrac{2x^2+2x-4}{x+2} + \sqrt{2}| + C
\end{aligned}$$

4.4.4. Ejercicios propuestos

Calcule las siguientes integrales:

1. $I = \int -\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})} = -4\sqrt[4]{x} + 4\ln|1+\sqrt[4]{x}| + C.$

2. $I = \int x^{\frac{3}{2}}(2x^{\frac{1}{3}}-1)^3 dx = -\dfrac{2}{5}\sqrt{x^5} + \dfrac{36}{17}\sqrt[6]{x^{17}} - \dfrac{72}{19}\sqrt[6]{x^{19}} + \dfrac{16}{7}\sqrt{x^{17}} + C.$

3. $I = \int x^3(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + C.$

4. $I = \int x^3(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{1+x^2} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x}-1}\,dx = \frac{1}{3}\left[2x\sqrt{x} + 3x + 6\sqrt{x} + 6\,\ln(\sqrt{x}-1)\right] + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx = 2\sqrt{x} + \ln\left[\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right] C.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}} = \frac{1}{2}\ln(2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}) + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \ln\left(\frac{2x+1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right) + C.$

9. $\displaystyle\int \sqrt{4x^2+4x-3}\,dx = \frac{1}{4}\left[(2x+1)\sqrt{4x^2+4x-3} - 4\,\ln\Big((2x+1) + \sqrt{4x^2+4x-3}\Big)\right] + C.$

10. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2x+1}{2}\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{4}\,\ln\left(\frac{2x+1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right)\right] + C.$

11. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \sqrt{x^2+2x+2} - \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx = -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}(x-1/2)\right) + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x-x^2}}\,dx = -\ln\left(\frac{x+2+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right) + C.$

4.5. Integración de ciertas funciones trascendentes.

4.5.1. Integración de funciones trigonométricas.

1. **Integración de funciones racionales en seno y coseno**. Si $R(u,v)$ denota una función racional de las variables u y v. Una función de tipo $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se in-

tegra usando la substitución $t = \tan\dfrac{x}{2}$. En virtud de las identidades trigonométricas tenemos que:

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}x} = sec^2\frac{1}{2}x = 1 + tan^2\frac{1}{2}x$$

implica

$$\cos^2 \frac{1}{2}x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Como,

$$\begin{aligned} \cos x &= 2\cos^2 \tfrac{1}{2}x - 1 \\ \cos x &= \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned} \tag{4.27}$$

Por otro lado,

$$\text{sen}\,^2\frac{1}{2}x = 1 - \cos^2 \frac{1}{2}x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Así,

$$\text{sen}\, x = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x = \frac{2t}{1+t^2}. \tag{4.28}$$

$t = \tan\frac{x}{2}$ es equivalente a tener $x = 2\arctan\, t$, por tanto

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \tag{4.29}$$

De (4.27), (4.28) y (4.29) vemos que una integral de una función racional en $\text{sen}\, x, \cos x$ se puede transformar en una integral de una función racional en la variable t. La que puede ser integrada por los métodos ya estudiados. En símbolos:

$$I = \int R(\,\text{sen}\, x, \cos x)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}) \cdot \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Ejemplo 4.5.1 *a*) Casos particulares de este tipo de integral son los ejemplos 18 y 19 de 4.1.10.

b) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{2\cos x - 3 \text{ sen } x}$

Haciendo $t = \tan \dfrac{x}{2}$, usando los cálculos recién hechos obtenemos que

$$I = \int \frac{1}{2 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} - 3 \cdot \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1+t^2}{-2t^2-6t+2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{-2dt}{t^2+3t-1} \\
&= -\int \frac{dt}{(t - \frac{-3+\sqrt{13}}{2})(t - \frac{-3-\sqrt{13}}{2})} \\
&= -\int \frac{1}{\sqrt{13}(t - \frac{-3+\sqrt{13}}{2})} dt + \int \frac{1}{\sqrt{13}(t - \frac{-3-\sqrt{13}}{2})} dt \\
&= -\frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2t+3-\sqrt{13}}{2} \right| + \frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2t+3+\sqrt{13}}{2} \right| + C \\
&= +\frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2t+3+\sqrt{13}}{2t+3-\sqrt{13}} \right| + C \\
&= +\frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2\tan\frac{x}{2}+3+\sqrt{13}}{2\tan\frac{x}{2}+3-\sqrt{13}} \right| + C.
\end{aligned}$$

c) $I = \dfrac{dx}{\text{sen } x - \cos x + 1}$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} - \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= \frac{1+t^2}{2t(t+1)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t(t+1)} \\
&= \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t+1} dt = \ln|t| - \ln|t+1| + C \\
&= \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + c = \ln \left| \frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+1} \right| + C
\end{aligned}$$

d) $I = \dfrac{dx}{\operatorname{sen} x + 1}$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{1+t^2}{t^2+1+2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2dt}{(t+1)^2} \\ &= \frac{-2}{(t+1)} + C = \frac{-2}{\tan \frac{x}{2} + 1} + C. \end{aligned}$$

2. **Integración de** $f(x) = \operatorname{sen}^m x \cos^n x$ **con** $m, n \in \mathbb{Q}$.

Si m, n son enteros y además :

* m es impar, se usa la substitución $t = \cos x$.
* n es impar, se usa la substitución $t = \operatorname{sen} x$.
* m, n son pares, se usa la substitución $t = \tan x$.

Si m, n son números racionales, entonces haciendo $t = \operatorname{sen} x$, la integral

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$$

se transforma en

$$\int t^m (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} \, dt$$

que es una integral estudiada en la sección 4.4 y que puede ser calculada si uno de los números $\dfrac{m+1}{2}, \dfrac{n-1}{2}, \dfrac{m+n}{2}$ es un entero.

Ejemplo 4.5.2 *a*) $I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$.
En este caso , $n = 3$ es impar.
Sea $t = \operatorname{sen} x$, $\dfrac{dt}{dx} = \cos x$

$$\begin{aligned}
I &= \int \text{sen}^{\,2}\, x\, \cos^2 x \cdot \cos x\, dx \\
&= \int \text{sen}^{\,2} x(1 - \text{sen}^{\,2} x) \cos x\, dx \\
&= \int t^2(1-t^2)\, dt = \int (t^2 - t^4)\, dt \\
&= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3}\, \text{sen}^{\,3} x - \frac{1}{5}\, \text{sen}^{\,5} x + C.
\end{aligned}$$

Esta integral también puede ser calculada usando la identidad $\text{sen}^{\,2} x + \cos^2 x = 1$, expresando toda la función en $\text{sen}\, x$ o $\cos x$, para después evaluar por partes (fórmulas de reducción) o usar ángulos dobles.

b) $I = \int \text{sen}^{\,2} x\, \cos^4 x\, dx$.

$$I = \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x\, dx = \int \cos^4 x\, dx - \int \cos^6 x\, dx$$

Cada una de ellas puede calcularse usando la respectiva fórmula de reducción. Calcularemos $\int \cos^4 x dx$ por medio de ángulos dobles, para mostrar un camino alternativo a las fórmulas de reducción. Reemplazando

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

en la integral I nos queda:

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\, dx &= \int (\frac{1 + \cos 2x}{2})^2\, dx \\
&= \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int (\frac{1 + \cos 4x}{2})\, dx \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\, \text{sen}\;\, 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}\, \text{sen}\;\, 4x + C \\
&= \frac{3}{8} + \frac{1}{4}\, \text{sen}\;\, 2x + \frac{1}{32}\, \text{sen}\;\, 4x + C.
\end{aligned}$$

c) $I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$.
Como ambos exponentes son pares, usaremos la substitución $t = \tan x$ y las expresiones de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ en función de tangente, desarrolladas en el ejercicios resuelto 1 de la sección 2.3 del Capítulo 2.

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\frac{dt}{dx} = sec^2 x = 1 + t^2$$

Así la integral I queda como:

$$I = \int \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$$I = \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^4}$$

que es una integral estudiada en la sección 4.2, ejemplo 10, y nos da:

$$I = \frac{x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 6x}{192}.$$

d) $I = \int \sqrt{\tan x}\, dx$.

$$I = \int \sqrt{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}\, dx = \int \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} x \cos^{-\frac{1}{2}} x \, dx$$

Como $\dfrac{m+n}{2} = 0$, usaremos la substitución $t = \operatorname{sen} x$ y obtenemos la integral

$$I = \int t^{\frac{1}{2}} (1 - t^2)^{-\frac{3}{4}} dt.$$

Ahora aplicaremos una segunda substitución siguiendo lo visto en la sección 4.4. Haciendo
$z = t^2$, la integral I toma la forma:

$$I = \frac{1}{2} \int z^{-1} \left(\frac{1-z}{z}\right)^{-\frac{3}{4}} dz.$$

Ahora debemos emplear la substitución $u = \sqrt[4]{\dfrac{1-z}{z}}$, e I queda expresada como $I = -2\displaystyle\int \frac{du}{u^4+1}$.
Como

$$u^4 + 1 = (u^2 + \sqrt{2}u + 1)(u^2 - \sqrt{2}u + 1)$$

y ambos polinomios cuadráticos son irreducibles en $\mathbb{R}$,
por desarrollo en fracciones simples podemos escribir:

$$\int \frac{du}{u^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1+\sqrt{2}u+u^2}{1-\sqrt{2}u+u^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}u}{1-u^2} + C.$$

Volviendo a las variables originales:

$$u = \sqrt[4]{\frac{1-z}{z}} = \sqrt[4]{\frac{1-t^2}{t^2}} = \sqrt[4]{\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \sqrt{\cot x}$$

Finalmente,

$$I = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{1+\sqrt{2\cot x}+\cot x}{1-\sqrt{2\cot x}+\cot x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2\cot x}}{1-\cot x} + C.$$

3. **Integrales de: sen** (ax) **sen** (bx) **,** $\cos(ax)\cos(bx)$ **, sen** $(ax)\cos(bx)$, $a \neq b$.

   Se resuelven usando las fórmulas trigonométricas que transforman productos en sumas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi &= \tfrac{1}{2}[\cos(\theta-\psi) - \cos(\theta+\psi)] \\ cos\theta \cos\psi &= \tfrac{1}{2}[\cos(\theta-\psi) + \cos(\theta+\psi)] \\ \operatorname{sen}\theta \cos\psi &= \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\theta-\psi) + \operatorname{sen}(\theta+\psi)] \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5.3

$$\begin{aligned} I &= \textstyle\int \operatorname{sen} 3x \cos 7x dx \\ &= \textstyle\int \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(-4x) + \operatorname{sen}(10x)]dx \\ &= \tfrac{1}{8}\cos 4x - \tfrac{1}{20}\cos 10x + C. \end{aligned}$$

4. **Integrales del tipo** $\int P(x)$ sen $mxdx$, $\int P(x) \cos mxdx$, donde $P(x)$ es un polinomio.

   Se calculan usando integración por partes. Haciendo $f(x) = P(x)$, $g'(x) =$ sen mx tenemos que $f'(x) = P'(x)$; $g(x) = -\frac{1}{m} \cos mx$. Por lo tanto,

   $$\int P(x) \text{ sen } mxdx = -\frac{1}{m} P(x) \cos mx + \frac{1}{m} \int P'(x) \cos mx \, dx.$$

   La segunda integral del miembro derecho se calcula nuevamente por partes. En cada etapa baja en una unidad el grado del polinomio $P(x)$ llegándose finalmente a la integral $\int \cos mx \, dx$ o $\int$ sen $mx \, dx$.

Ejemplo 4.5.4 $I = \int (x^2 - 3x + 1) \cos 2x \, dx$.

Integrando por partes tenemos que,

$$I = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 1)\text{sen } 2x - \frac{1}{2} \int (2x - 3)\text{sen} 2x \, dx$$

$$\begin{aligned} \int (2x - 3)\text{sen } 2x \, dx &= -\tfrac{1}{2}(2x - 3) \cos 2x + \tfrac{1}{2} \int 2 \cos 2x \, dx \\ &= -\tfrac{1}{2}(2x - 3) \cos 2x + \tfrac{1}{2}\text{sen } 2x + C. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{1}{2}(x^2 - 3x + 1)\text{sen } 2x + \tfrac{1}{4}(2x - 3) \cos 2x - \tfrac{1}{4}\text{sen } 2x + C \\ I &= \tfrac{1}{2}(x^2 - 3x + \frac{1}{2})\text{sen } 2x + \frac{1}{4}(2x - 3) \cos 2x + C. \end{aligned}$$

5. **Aplicación de las integrales trigonométricas en el cálculo de integrales de funciones irracionales de segundo grado.**

   Las integrales que involucran potencias enteras de x y de una de las raíces: $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{x^2 + a^2}$ pueden ser transformadas en una integral de una función racional en sen x, $\cos x$, $R(\text{sen } x, \cos x)$, usando una de las sustituciones $x = \text{sen } t$, $x = \tan t$, $x = \sec t$.

   La substitución $x = a$ **sen** t **:** Para integrar una función que involucra potencias enteras de x y de $\sqrt{a^2 - x^2}$, con $a > 0$ se usa la substitución: $x = a$ sen t. Así tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = a\cos t, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \text{ sen }^2 t}$$
$$= a\sqrt{1 - \text{ sen }^2 t} = a\cos t,$$

con $t \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, por tanto, $\cos t > 0$.

Ejemplo 4.5.5 $I = \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx.$
Si $x = 2\,\text{sen}\, t$ entonces,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4 \text{ sen }^2 t}{2\cos t} 2\cos t dt = 4\int \text{ sen }^2 t\, dt \\ &= 4\int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2t - \text{ sen } 2t + C \\ &= 2t - 2 \text{ sen } t \cos t + C \\ &= 2 \,\text{arc sen}\, \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + C. \end{aligned}$$

La substitución $x = a \tan t$ **:** Esta es adecuada para integrar funciones que involucran potencias enteras de x y de $\sqrt{x^2 + a^2}$, $a > 0$.
Haciendo $x = a\tan t$ se tiene

$$\frac{dx}{dt} = a\sec^2 t; \quad \sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2(\tan^2 t + 1)} = a\sec t \quad \text{pues} \quad t \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Ejemplo 4.5.6 $I = \displaystyle\int \frac{x^2}{x^2 + 16}\, dx :$
Si $x = 4 \tan t$ entonces,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{16\tan^2 t}{4\sec^2 t} 4\sec^2 t\, dt = 16\int \tan^2 t\, dt \\ &= 16\int (\sec^2 t - 1)\, dt = 16\tan t - 16t + C \\ &= 16 \cdot \frac{x}{4} - 16\arctan(\frac{x}{4}) + C \\ &= 4x - 16\arctan\frac{x}{4} + C. \end{aligned}$$

La substitución $x = a\,\sec t$ **:** Es adecuada para integrar funciones que involucran potencias enteras de x y de $\sqrt{x^2 - a^2}$; $a > 0$.

Haciendo $x = a \sec t$ se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = a \sec t \tan t\, dt$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\,|\tan t|.$$

Es necesario tomar el valor absoluto, pues para $x < -a$, $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ y por consiguiente la tangente de t es negativa.

Ejemplo 4.5.7 $I = \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}} dx.$

$x = 3 \sec t$, $\dfrac{dx}{dt} = 3\, \sec t\, \tan t\, dt$; $\sqrt{x^2 - 9} = 3|\tan t|$. Así,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{9 \sec^2 t}{3|\tan t|} \cdot 3\, \sec t \tan t\, dt \\ &= \begin{cases} \displaystyle\int 9 \sec^3 t\, dt & \text{si} \quad x < -3 \\ \\ -\displaystyle\int 9 \sec^3 t\, dt & \text{si} \quad x > 3. \end{cases} \end{aligned}$$

La integral $J = \displaystyle\int \sec^3 t\, dt$ puede calcular usando la fórmula de reducción 4 de la sección 4.2.

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \sec t\, \tan t + \frac{1}{2} \int \sec t\, dt \\ &= \frac{1}{2} \sec t\, \tan t + \frac{1}{2} \ln |\tan(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})| + C \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 9}| + C. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-9} + \frac{9}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-9}| + C.$$

4.5.2. Integración de funciones trigonométricas inversas.

1. **La integral** $\int f(\textbf{arc sen}\, x)\, dx$.

   Se calcula mediante la substitución $t = \text{arc sen}\, x$ que transforma la integral en una del tipo $\int f(t)\cos t\, dt$. La cual puede calcularse en los casos en que $f(t)$ es un polinomio según lo visto en el párrafo anterior.

   Ejemplo 4.5.8 $I = \int(\text{arc sen}\, x)^2\, dx$.

   Haciendo $t = \text{arc sen}\, x$,

$$I = \int t^2 \cos t\, dt$$

   Para esta integral podemos proceder como en el párrafo anterior o usar las fórmulas de reducción 4.11 y 4.12.

$$\begin{aligned} I &= t^2 sent - 2\int t\,\text{sen}\, t\, dt \\ &= t^2\text{sen}\, t - 2[-t\cos t + \int \cos t\, dt] \\ &= t^2\text{sen}\, t + 2t\cos t - 2\text{sen}\, t + C \\ &= (t^2-2)\text{sen}\, t + 2t\cos t + C \end{aligned}$$

   Como $\text{sen}\, t = x$, $\cos t = \sqrt{1-x^2}$, la integral es,

$$I = ((\text{arc sen}\, x)^2 - 2)x + 2\sqrt{1-x^2}\text{arc sen}\, x + C.$$

2. **La integral** $\int P(x)$ **arc sen** xdx **donde** $P(x)$ **es un polinomio.**
   Se realiza por el método de integración por partes.

Ejemplo 4.5.9 $I = \int x \text{ arc sen}\, x\, dx$.

Haciendo: $f(x) = \text{arc sen}\, x$, $g'(x) = x$ tenemos,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; ; \; g(x) = \frac{x^2}{2}$$

Así,

$$I = \frac{x^2}{2} arcsenx - \int \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} dx$$

La segunda integral se puede calcular usando la substitución trigonométrica $x = \text{ sen } t$ y es del mismo tipo que la integral del ejemplo 4.5.5.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} arcsenx + C$$

Finalmente,

$$I = \frac{x^2}{2} arcsenx - \frac{1}{4} arcsenx + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C.$$

4.5.3. Integración de funciones hiperbólicas, exponenciales y logarítmicas.

1. **Funciones hiperbólicas.**

   Mediante la substitución $x = au$, $dx = a\, du$ se obtienen las siguientes generalizaciones de las fórmulas de integración dadas por el teorema 3.4.22.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = arccosh \frac{x}{a}; \quad \text{para } |x| > |a|.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a} arc \tanh \dfrac{x}{a}; & \text{para } |x| < |a| \\ \dfrac{1}{a} arc \coth \dfrac{x}{a}; & \text{para } |x| > |a| \end{cases}$$

   Usando la substitución $u = \cosh x$ y $u = \text{ senh } x$ se obtienen, respectivamente, las fórmulas:

$$\int \tanh x\, dx = \ln \cosh x$$

$$\int \coth x\, dx = \ln |\text{sen}\, h\, x|.$$

Mediante la substitución $x = a \cosh u$ se obtiene:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = -\frac{a^2}{2} arc \cosh \frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Análogamente la substitución $x = a$ senh u permite calcular:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{a^2}{2} \text{ arc senh } \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$$

La substitución $u = \frac{a}{x}$; $dx = -\frac{a}{u^2} du$ nos da las fórmulas:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a} arcsen\, h \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a} arcsen\, h \frac{a}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} arc \cosh \frac{a}{x}.$$

2. **Integrales del tipo** $\int f(a^x)\, dx$.

   Se calculan haciendo $u = a^x$, $\frac{du}{dx} = \ln a\, a^x$. Así, la integral $\int f(a^x)\, dx$ se transforma en una de la forma

$$\frac{1}{\ln a} \int \frac{f(u)}{u} du$$

Ejemplo 4.5.10 (1) $I = \int \frac{1}{a^x + 1} dx$.

Sea $u = a^x$, entonces

$$I = \frac{1}{\ln a} \int \frac{1}{u+1} \cdot \frac{1}{u} du$$

Esta se realiza mediante la descomposición en fracciones simples:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\ln a}[\int \frac{-1}{u+1}du + \int \frac{1}{u}du] \\
&= \frac{1}{\ln a}[-\ln|u+1| + \ln|u|] + C \\
&= \frac{1}{\ln a}\ln|\frac{u}{u+1}| + C = \frac{1}{\ln a}\ln\frac{a^x}{a^x+1} + C.
\end{aligned}
$$

(2) $I = \int \sqrt{1-a^x}dx$.

Haciendo $u = a^x$ nos queda: $I = \dfrac{1}{\ln a}\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-u}}{u}du$. Esto se calcula mediante la substitución $y = \sqrt{1-u}$ que nos da: $y^2 = 1-u$, $2ydy = -du$. Por lo tanto,

$$I = \frac{-2}{\ln a}\int \frac{y^2}{1-y^2}dy;$$

que puede calcularse usando descomposición en fracciones parciales, obteniendo:

$$
\begin{aligned}
I &= \tfrac{-2}{\ln a}[2y + \ln|\tfrac{1-y}{1+y}|] + c \\
&= \tfrac{-2}{\ln a}[2\sqrt{1-a^x} + \ln|\tfrac{1-\sqrt{1-a^x}}{1+\sqrt{1-a^x}}|] + C.
\end{aligned}
$$

3. **Integrales del tipo $\int P(x)a^x dx$, donde $P(x)$ es un polinomio.**

Utilizando integración por partes se puede bajar sucesivamente el grado del polinomio $P(x)$. Sea

$$f(x) = P(x); \quad g'(x) = a^x; \quad f'(x) = P'(x); \quad g(x) = \frac{1}{\ln a}a^x.$$

Así,

$$\int P(x)a^x\,dx = \frac{P(x)\cdot a^x}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\int P'(x)a^x\,dx.$$

La integral del miembro derecho vuelve a integrarse por partes, hasta que finalmente se llega a la integral $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$.

Ejemplo 4.5.11 $I = \int (x^3-1)a^x dx$.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{(x^3-1)a^x}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\int 3x^2a^x dx \\
&= \frac{(3x-1)a^x}{\ln a} - \frac{3}{\ln a}[\frac{x^2\cdot a^x}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\int 2xa^x dx] \\
&= \frac{(x^3-1)a^x}{\ln a} - \frac{3x^2a^x}{(\ln a)^2} + \frac{6}{(\ln a)^2}\int xa^x dx \\
&= \frac{(x^3-1)a^x}{\ln a} - \frac{3x^2a^x}{(\ln a)^2} + \frac{6}{(\ln a)^2}[\frac{xa^x}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\int a^x dx] \\
&= \frac{(x^3-1)a^x}{\ln a} - \frac{3x^2a^x}{(\ln a)^2} + \frac{6}{(\ln a)^2}[\frac{xa^x}{\ln a} - \frac{1}{(\ln a)^2}a^x] + C \\
&= \frac{(x^3-1)a^x}{\ln a} - \frac{3x^2a^x}{(\ln a)^2} + \frac{6xa^x}{(\ln a)^3} - \frac{6a^x}{(\ln a)^4} + C \\
&= [\frac{x^3-1}{\ln a} - \frac{3x^2}{(\ln a)^2} + \frac{6x}{(\ln a)^3} - \frac{6}{(\ln a)^4}]a^x + C.
\end{aligned}$$

4. **Integrales del tipo** $\int P(\ln x)dx$; **donde** $P(x)$ **es un polinomio.**

Utilizando la substitución $u = \ln x$, estas integrales pueden llevarse a una del tipo anterior.

Si $u = \ln x$, entonces, $x = e^u$, $dx = e^u du$. Así,

$$\int P(\ln x)\,dx = \int P(u)e^u\,du.$$

Ejemplo 4.5.12 $I = \int ((\ln x)^3 - 1)dx$.

Haciendo $u = \ln x$.

$$I = \int (u^3-1)e^u du$$

Esta integral nos da como en el ejemplo anterior

$$I = [u^3 - 1 - 3u^2 + 6u - 6]e^x + C.$$

$(\ln e = 1)$.

$$I = [u^3 - 3u^2 + 6u - 7]e^x + C$$

$$I = [(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6\ln x - 7]x + C$$

5. **Integrales del tipo** $\int x^n (\ln x)^m dx;\ \ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}$.

Si $n = -1$

$I = \displaystyle\int \frac{(\ln x)^m}{x} dx$, se realiza usando $u = \ln x$. I se transforma en $\int e^{-1} u^m du$ que puede ser calculada con la fórmula de reducción 4.13.

Si $n \neq -1$, se utiliza integración por partes,

$f = (\ln x)^m; \qquad g' = x^n$

$f' = \dfrac{m(\ln x)^{m-1}}{x} \qquad g = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Por lo tanto,

$$\int x^n (\ln x)^m dx = \frac{x^{n+1}(\ln x)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^n (\ln x)^{m-1} dx.$$

Usando recursivamente integración por partes se llega finalmente a la integral $\int x^n dx$.

Ejemplo 4.5.13 $I = \int x^3 (\ln x)^2\, dx$.

Aplicando la fórmula con $n = 3$ y $m = 2$, nos queda:

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^4(\ln x)^2}{4} - \frac{2}{4}\int x^3(\ln x)\, dx \\ &= \frac{x^4(\ln x)^2}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^4\, \ln x}{4} - \frac{1}{4}\int x^3\, dx\right] \\ &= \frac{x^4(\ln x)^2}{4} - \frac{x^4\,(\ln x)}{8} + \frac{1}{8}\int x^3\, dx \\ &= \frac{x^4(\ln x)^2}{4} - \frac{x^4\,(\ln x)}{8} + \frac{x^4}{32} + C. \end{aligned}$$

6. **Integrales del tipo** $\int P(x)(\ln x)^m dx$.

   Estos contienen a las integrales recién estudiadas, por lo que se procede de igual manera.

   Ejemplo 4.5.14 $I = \int (x^3 - 1)(\ln x)^2 \, dx$.

   Aplicando la fórmula para $P(x) = x^3 - 1$ y $m = 2$ tenemos:

$$I = \int x^3 \, (\ln x)^2 \, dx - \int (\ln x)^2 \, dx.$$

   La primera integral es la que hemos calculado en el ejemplo 4.5.13 , la segunda se calcula usando lo descrito en 4 usando la substitución $x = e^u$ y obtenemos:

$$\int (\ln x)^2 \, dx = \left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right] x + C.$$

   Así,

$$I = \frac{x^4 (\ln x)^2}{4} - \frac{x^4 \, (\ln x)}{8} + \frac{x^4}{32} + \left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right] x + C.$$

4.5.4. Ejercicios propuestos

1. $\displaystyle\int \frac{(1 + \text{sen } x)}{\text{sen } x(1 + \cos x)} \, dx = \frac{1}{4} \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + \tan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\text{sen}^2 x \, \cos^2 x} \, dx = \frac{1}{\text{sen}\, x \cos x} - 2\text{cotan}\, x + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{\text{sen} x \, \cos^2 x} \, dx = \frac{1}{\cos x} + \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{\text{sen}^2 x \, \cos x} \, dx = -\frac{1}{\text{sen } x} + \ln\left[\sec x + \tan x\right] + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{\text{sen} x \, \cos x} \, dx = \ln(\tan x) + C.$

6. $\int \text{sen } 4x \, \text{sen } 3x \, dx = \dfrac{\text{sen } x}{2} - \dfrac{\text{sen } 7x}{14} + C.$

7. $\int \text{sen } (4x - 4) \, \text{sen } (3x - 3) \, dx = \dfrac{\text{sen } (x-1)}{2} - \dfrac{\text{sen } 7(x-1)}{14} + C$

8. $\int \text{sen } 5x \, \cos 2x \, dx = -\dfrac{\cos 3x}{6} - \dfrac{\text{sen } 7x}{14} + C$

9. $\int \cos 8x\, \cos 3x\, dx = \dfrac{\text{sen } 5x}{10} - \dfrac{\text{sen } 11x}{22} + C$

10. $\int \text{sen } ax\, \cos bx\, dx = -\frac{1}{2}\left[\dfrac{\cos(a-b)\,x}{a-b} + \dfrac{\cos(a+b)\,x}{a+b}\right] + C$

11. $\int \text{sen } ax \,\text{sen } bx\, dx = \frac{1}{2}\left[\dfrac{\text{sen }(a-b)\,x}{a-b} - \dfrac{\text{sen }(a+b)\,x}{a+b}\right] + C$

12. $\int \cos ax\, \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\left[\dfrac{\text{sen }(a-b)\,x}{a-b} + \dfrac{\text{sen }(a+b)\,x}{a+b}\right] + C$

13. $\int \cos x\, \cos 2x\, \cos 3x\, dx = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\text{sen } 6x}{6} + \dfrac{\text{sen } 4x}{4} + \dfrac{\text{sen } 2x}{2} + x\right) + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{x}{8}(3+2x^2)\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{8}\,\text{arc sen } x + C.$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \arctan e^x + C.$

16. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\,\text{arc sen}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{9+x^2} - \frac{9}{2}\text{arcsenh}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-9} + \frac{9}{2}\ln(x + \sqrt{x^2-9}) + C.$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\, dx = -\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{x^2-9}}\right) + C.$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{9-x^2}}\, dx = -\frac{1}{3}\text{arctanh}\left(\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\right) + C.$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-16}}\, dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2-16}\right) + C.$

22. $\displaystyle\int \frac{1}{4-x^2}\, dx = -\frac{1}{4}\ln(x-2) + \frac{1}{4}\ln(x+2) + C.$

23. $\int (x^2 - 2x + 1)\, e^x\, dx = e^x x^2 - 4e^x x + 5e^x + C.$

24. $\displaystyle\int \left[(\ln x)^2 - 2\,\ln x + 1\right]\, dx = (\ln x)^2 - 2x\ln x + 3x + C.$

25. $\int x^2(\ln x)^3\,dx = \dfrac{1}{3}x^3(\ln x)^3 - \dfrac{1}{3}x^3(\ln x)^2 + \dfrac{2}{9}x^3\ln x - \dfrac{2}{27}x^3 + C.$

Problemas Generales

1. La temperatura en grados Farenheit (F°) de la ciudad de Valparaíso, t horas después de las 11 : 00 hrs, se expresa, aproximadamente, mediante la función:

$$T(t) = 60 + 17\operatorname{sen}\frac{\pi t}{15}$$

Calcular la temperatura promedio durante el período comprendido entre las 11 : 00 hrs y las 23 : 00 hrs.

Nota: La medición de temperatura en grados Farenheit, es utilizada principalmente en los países Anglo Sajones. La relación de los grados Farenheit con los grados Celcius a los cuales estamos habituados, es de tipo lineal, donde 0°C equivalen a 32°F, y 100°C equivalen a 212°F.

Solución: $a = 11; b = 23$

$$\begin{aligned}
\overline{T} &= \frac{1}{23-11}\int_{11}^{23}\left(60 + 17\operatorname{sen}\frac{\pi t}{15}\right)\,dt \\
&= \frac{1}{12}\left[\int_{11}^{23} 60\,dt + 17\int_{11}^{23}\operatorname{sen}(\frac{\pi t}{15})\,dt\right] \\
&= \frac{1}{12}\left[60t\,|_{11}^{23} + 17\left(\frac{-15}{\pi}\cos x\,|_{\frac{11\pi}{15}}^{\frac{23\pi}{15}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{12}\,[720 - 62{,}9] \\
&= 54{,}758^\circ F
\end{aligned}$$

2. Calcular el valor promedio de $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)$ en el intervalo $[-\pi/2, \pi/4]$.

Solución: Tenemos: $a = \frac{-\pi}{2}$ y $b = \frac{\pi}{4}$

Entonces, el valor promedio de la función es:

$$\begin{aligned}
\overline{f} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\frac{\pi}{4}-\frac{-\pi}{2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/4} \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)dx \\
&= \frac{4}{3\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/4} = \frac{4}{9\pi}\left[\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}^3\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{4}{9\pi}\left[1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right] = \frac{4}{9\pi}\left[1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right] \\
&= \frac{4}{9\pi}\left[\frac{4+\sqrt{2}}{4}\right] = \frac{4+\sqrt{2}}{9\pi}
\end{aligned}$$

3. Considerar la función del problema anterior y encontrar el punto c que satisface el Teorema del Valor Medio.

   Solución: Como $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)$ es continua en $[-\pi/2, \pi/4]$, el Teorema del Valor Medio para integrales indica que existe un número c en este intervalo tal que:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/4} \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)dx = f(c)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{2}\right)$$

   Luego, sabemos que $f(c) = \overline{f} = \frac{4+\sqrt{2}}{9\pi}$
   Por lo tanto:

$$\operatorname{sen}^2(c)\cos(c) = \frac{4+\sqrt{2}}{9\pi} = 0{,}1914\ldots \approx 0{,}2$$

   De esta forma tenemos tres puntos c, que son $c_1 \approx -\pi/6$, $c_2 \approx \pi/6$ y $c_3 \approx -7\pi/15$, en el intervalo $[-\pi/2, \pi/4]$ que satisfacen el Teorema del Valor Medio para integrales aplicado a $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos x$.

4. Determine la ecuación de la curva $y = f(x)$, en base a la información que a continuación se detalla:

   - Pasa por el punto $(7, 8)$.
   - Tiene un punto crí tico en $x = 7$.
   - El valor de su segunda derivada es $\ln(8-x)$, $\forall\, x \in \mathit{Dom}(f)$

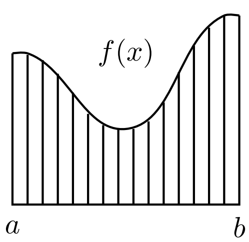
Capítulo 5

Aplicaciones de la integral

5.1. Cálculo de áreas

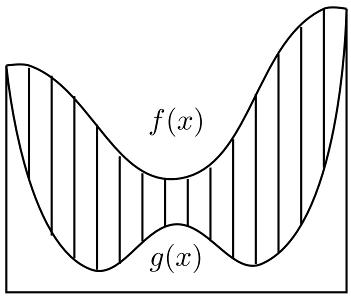
5.1.1. Cálculo de áreas en coordenadas rectangulares

Como hemos visto en el capítulo 3, si $f(x) \geq 0$ entonces, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ representa el área comprendida entre el gráfico de la función, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.



Supongamos que f y g son dos funciones no negativas cuyos gráficos se cortan sólo en $(a, f(a))$ y $(b, g(b))$ y, además,que $g(x) \leq f(x)$. En este caso el área entre las gráficas de g y f esta dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$



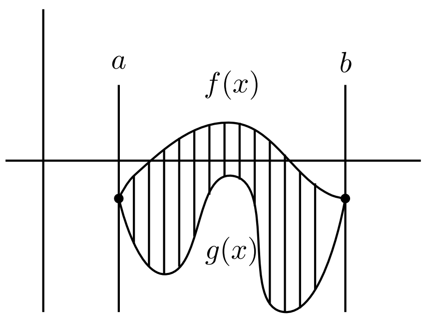
Si $g(x) \leq f(x)$ y las funciones son negativas en alguna parte, el área entre ambas curvas también es $A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$. En efecto sea $m = \inf\{g(x)\,;\ x \in [a,b]\}$.

Definimos las funciones h y H por

$$h(x) = f(x) + 2m \geq g(x) + 2m = H(x).$$

En esta caso el área entre h y H es igual al área entre f y g.
Por lo tanto,

$$A = \int_a^b (h(x) - H(x))dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$



Ejemplo 5.1.1 Calculemos el área encerrada por un círculo centrado en el orígen y de radio r.

Sean $S_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2+y^2=r^2\}\,,\ f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{r^2-x^2}$, entonces

$$A = \int_{-r}^{r} (f(x)-g(x))dx = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2-x^2}dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}dx$$

$$= 2\cdot 2\int_{0}^{r} \sqrt{r^2-x^2}dx.$$

Usando el cambio de variable:

$$x = r\operatorname{sen}(\theta), \text{tenemos } dx = r\cos(\theta)d\theta.$$

Entonces,

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\operatorname{sen}^2(\theta)}\cdot r\cos(\theta)d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cdot\cos^2(\theta)d\theta = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta$$

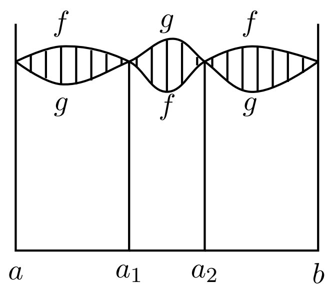
$$= 4r^2\cdot\left(\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2\theta)}{2}d\theta\right) = r^2\pi + r^2\int_0^{\pi}\cos(v)dv = r^2\pi$$

Por lo tanto,

$$A = \pi r^2.$$

Observación 5.1.2

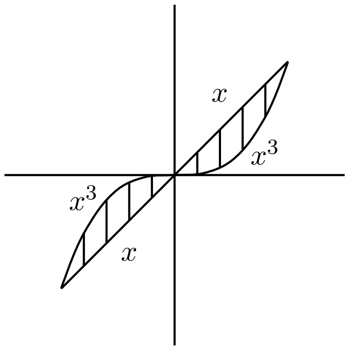
Si los gráficos, de las funciones f y g, se cortan en varios puntos, entonces se debe calcular los puntos de intersección de ambas curvas y analizar separadamente, el signo de la diferencia de las funciones en cada tramo.



$$A = \int_{a}^{a_1} (f-g) + \int_{a_1}^{a_2} (g-f) + \int_{a_2}^{b} (f-g).$$

Ejemplo 5.1.3 Calcular el área entre $f(x) = x^3$ y $g(x) = x$.

Solución:



Cálculo de los puntos de intersección entre las curvas.

$$\begin{aligned} x^3 = x &\iff x^3 - x = 0 \iff x(x^2-1) = 0 \iff x(x-1)(x+1) = 0 \\ &\iff x = 0,\ 1,\ -1. \end{aligned}$$

Las curvas se cortan en los puntos: $(-1,-1)$, $(0,0)\, y\, (1,1)$.
Por lo tanto, el área se calcula separando las integrales:

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)dx$$

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\int_{0}^{1} (x - x^3)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Así,

$$A = \frac{1}{2}.$$

5.1.2. Cálculo de áreas usando ecuaciones paramétricas

Hemos visto en el párrafo anterior que él área bajo una curva $y = f(x)$, cuando f es positiva y $x \in [a,b]$ es:

$$A = \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} y(x)dx$$

Si las ecuaciones de la curva vienen dadas en términos de un parámetro, es decir:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\ ; t \in [a, b] \end{cases}$$

Recordando lo visto en la subsección 2.6.3 del cápitulo 2 y usando la fórmula de cambio de variable se tiene:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(x(t)) \frac{dx}{dt} dt.$$

Donde:

$$\begin{cases} x(t_1) = a \\ x(t_2) = b. \end{cases}$$

Ejemplo 5.1.4 Calcular el área bajo un arco de la cicloide:

$$\begin{cases} x(t) = at \\ y(t) = a(1 - \cos t), \quad a \text{ positivo.} \end{cases}$$

Solución: $y(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Un arco de la cicloide está comprendido entre dos ceros consecutivos de $y(t)$.

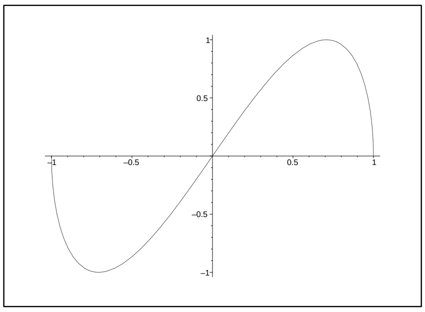
$$\begin{aligned} y(t) = 0 \iff & a(1 - \cos t) = 0 \iff 1 = \cos t \\ \iff & t = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Consideraremos el arco para $t \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} y(t) \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{\pi} a(1 - \cos t) \cdot a\, dt \\ &= a^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos t)\, dt = a^2 (t - \operatorname{sen} t) \Big|_0^{\pi} = a^2 \pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.1.5 Calcular el área encerrada por la lemniscata de Gerono estudiada en el ejemplo 2.6.16 de la subsección 2.6.3.

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} 2t, \quad t \in [0, \pi]. \end{cases}$$



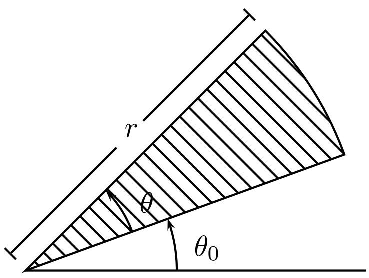
Solución: Como esta curva es simétrica con respecto a los dos ejes, basta calcular el área de un cuadrante.

$$A = \int_{x=0}^{1} y(x)dx = \int_{\pi/2}^{0} y(t)\frac{dx}{dt}dt = \int_{\pi/2}^{0} \operatorname{sen} 2t \cdot (-\operatorname{sen} t)\, dt$$
$$= -\int_{\pi/2}^{0} 2\operatorname{sen} t \cdot \cos t \cdot \operatorname{sen} t\, dt = \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt = 2\frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}\Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

5.1.3. Cálculo de áreas en coordenadas polares

Sea $S_r(x_0, y_0)$ un círculo de centro (x_0, y_0) y radio r. Sabemos que el sector de $S_r(x_0, y_0)$ comprendido entre los ángulos $\nu = \theta_0$y $\nu = \theta_0 + \theta$ tiene área $\frac{1}{2}\theta r^2$.

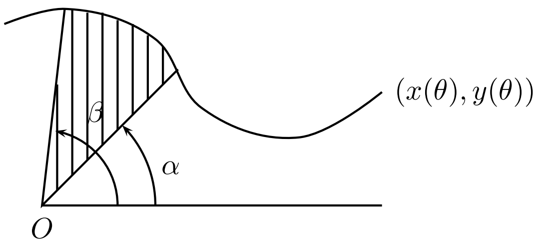
Suponemos ahora que $r = f(\theta)$ y que $x = f(\theta)\cos\theta$, $\quad y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$ es una curva en el plano (x, y) expresada en coordenadas polares. Vamos a calcular el área de esta curva comprendida en el sector determinado por los ángulos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ como podemos ver en la siguiente figura.



Con este propósito dividimos el intervalo $[\alpha, \beta]$ en subintervalos $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ de modo que :

$$\alpha = \theta_0 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_n = \beta.$$

En cada subintervalo, elegimos un punto cualquiera $\xi_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ y formamos la suma de Riemann que representa la suma de las áreas de los sectores circulares de ángulos θ_{i-1} y θ_i y radio $f(\xi_i)$:



De acuerdo a lo señalado tenemos que la suma S de las áreas de los sectores circulares de ángulos $\theta_i - \theta_{i-1}$ y radios $f(\xi_i)$ es:

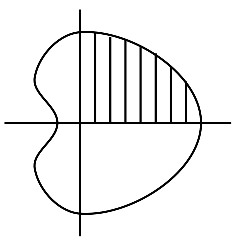
$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left[f(\xi_i)\right]^2 \cdot (\theta_i - \theta_{i-1}) \, .$$

En este caso lo que hemos hecho es aproximar el área que nos interesa calcular con la de los sectores circulares de radio constante. Para obtener el área exacta debemos afinar la partición haciendo tender $n \to +\infty$. Así, obtenemos que el área está dada por la respectiva integral.

$$\text{Area } = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} (f(\theta))^2 d\theta.$$

Ejemplo 5.1.6 Encuentre el área acotada por la curva $r = 2 + \cos\theta$ y los ángulos $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$.

Solución: De acuerdo a lo visto en el capítulo 2, sección **??**, la curva representada por la ecuación es una cardioide. El área pedida corresponde a la zona marcada en la figura.



$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(2+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(4+4\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} d\theta + 2\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta. \\
&= \pi + 2\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos(2\theta)\,d\theta \\
&= \pi + 2 + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos(2\theta)\,d\theta.
\end{aligned}
$$

Haciendo el cambio de variable para la última integral,

$$
\begin{cases} u &= 2\theta \\ du &= 2d\theta, \end{cases}
$$

nos queda:

$$
\begin{aligned}
A &= \pi + 2 + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos(u)\cdot\frac{du}{2} \\
&= \frac{9}{8}\pi + 2.
\end{aligned}
$$

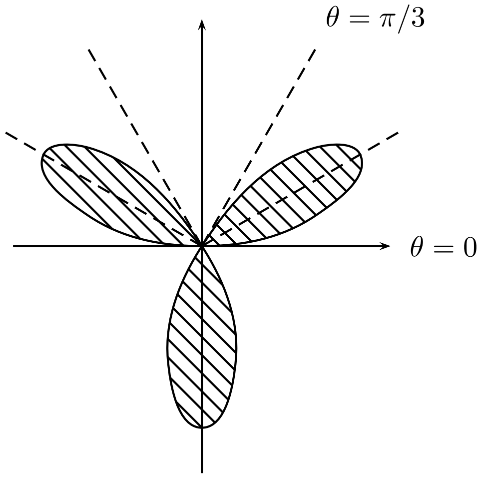
Ejemplo 5.1.7 Encuentre el área que encierra la curva $r = 2\ \operatorname{sen}(3\theta)$.

Solución: Como en todo cálculo de área, es importante y útil, hacer previamente el gráfico correspondiente.

$$\varphi(\theta) = 2sen(3\theta).$$

Usando la aprendido en el capítulo 2 vemos que la curva es una rosa de tres pétalos. En particular, la curva es es simétrica con respecto al eje Y. en efecto,

$$
\begin{aligned}
\varphi(-\theta+\pi) &= 2\operatorname{sen}(-3\theta+3\pi) \\
&= 2[\operatorname{sen}(-3\theta)\cos(3\pi) + \cos(-3\theta)\operatorname{sen}(3\pi)] \\
&= 2\operatorname{sen}(-3\theta)(-1) = 2\operatorname{sen}(3\theta) = \varphi(\theta).
\end{aligned}
$$



Sea A_0 en área encerrada por el pétalo del primer cuadrante, por lo tanto, el área solicitada es $3A_0$.

$$A_0 = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2}(2\,\mathrm{sen}\,(3\theta))^2 d\theta = 2\int_0^{\pi/3} \mathrm{sen}^2\,(3\theta) d\theta.$$

Haciendo el cambio de variable ,

$$\begin{cases} u &= 3\theta \\ du &= 3d\theta, \end{cases}$$

nos queda:

$$A_0 = 2\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2\,(u)\frac{du}{3} = \frac{2}{3}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2\,(u) du.$$

Usando la fórmula del ángulo doble, obtenemos:

$$A_0 = \frac{2}{3}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2u}{2} du = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} du - \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \cos(2u)du \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \cos(2u)du.$$

Nuevamente, cambiando de variable

$$\begin{cases} v &= 2\theta \\ dv &= 2d\theta, \end{cases}$$

nos queda:

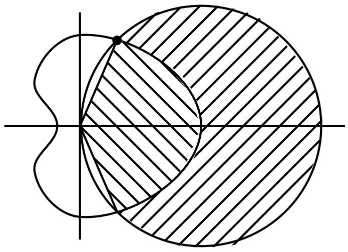
$$A_0 = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos v \frac{dv}{2} = \pi/3.$$

Por lo tanto,

$$A = 3A_0 = \pi.$$

Ejemplo 5.1.8 Encuentre el área en el interior del círculo $r = 5\cos\theta$ y fuera de la cardiode $r = 2+\cos\theta$.

Solución: El área solicitada es la achurada en la siguiente figura.



Cálculo de los puntos de intersección de ambas curvas:

$$2+\cos\theta = 5\cos\theta \iff \cos\theta = 1/2 \iff \theta = \pi/3\,, -\pi/3.$$

Ahora, calculamos el área encerrada por cada curva.

Sean A_1 el área encerrada por el círculo y sea A_2 el área encerrada por la cardioide:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2} 25\cos^2\theta d\theta \\ A_2 &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2}(2+\cos\theta)^2 d\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área pedida es:

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 25\cos^2\theta d\theta - \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(2+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{8\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

Ejercicios resueltos

1. Calcule el área de un círculo, usando:

   a) Su ecuación en coordenadas rectangulares.

   b) Sus ecuaciones paramétricas.

   Solución:

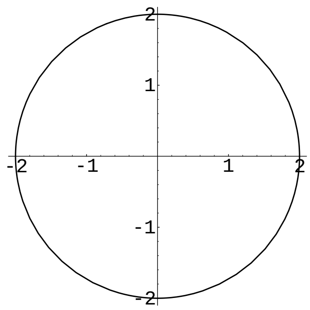


Figura 5.1: Gráfico de un círculo de radio r

a) $x^2 + y^2 = r^2$
$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \qquad r \leq x \leq r.$
Usando simetría tenemos:

$$\text{Area} = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx.$$

Esta integral se calcula usando el cambio de variable:

$$\begin{cases} x &= r \operatorname{sen}\theta \\ dx &= r\cos\theta d\theta. \end{cases}$$

Este cambio de variable implica el siguiente cambio en los límites de integración:

$$\begin{cases} x = r \iff \operatorname{sen}\theta = 1 \iff \theta = \pi/2. \\ x = -r \iff \operatorname{sen}\theta = -1 \iff \theta = -\pi/2. \end{cases}$$

Entonces nos queda:

$$\begin{aligned} \text{Area} &= 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx = 2\cdot\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - r^2\operatorname{sen}^2\theta}\, r\,\cos\theta\, d\theta \\ &= 2\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\cos^2\theta d\theta \\ &= 2r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta \\ &= r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta + r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2\theta\, d\theta \\ &= \pi r^2. \end{aligned}$$

b) La ecuación de la circunferencia centrada en el origen y de radio r_0 en coordenadas polares es $r = r_0$. Por lo tanto,

$$\text{Area } = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r_0^2 d\theta = \pi r_0^2.$$

2. Calcule el área de una elipse cuyos semiejes son 2 y 3, usando:

a) Su ecuación en coordenadas rectangulares.

b) Sus ecuaciones paramétricas.

Solución:

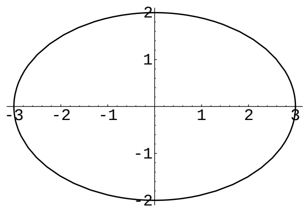


Figura 5.2: Gráfico de una elipse

a) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \iff y^2 = 9\left(1 - \dfrac{x^2}{4}\right) \iff y = \pm 3\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}}.$

Por lo tanto, usando la simetría de la curva,el área A pedida es

$$A = 2\int_{-2}^{2} 3\cdot\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, dx.$$

Esta integral, como en el caso anterior, se calcula usando el cambio de variable:

$$\begin{cases} x &= 2\cos\theta \\ dx &= -2\,\text{sen}\,\theta d\theta. \end{cases}$$

Este cambio de variable implica el siguiente cambio en los límites de integración:

$$\begin{cases} x = 2 \iff \cos\theta = 1 \iff \theta = 0. \\ x = -2 \iff \cos\theta = -1 \iff \theta = -\pi. \end{cases}$$

Entonces nos queda:

$$\begin{aligned} A &= 6\int_{-\pi}^{0} \text{sen}\,\theta(-2\,\text{sen}\,\theta)d\theta = -12\int_{-\pi}^{0} \text{sen}^2\,\theta\, d\theta \\ &= -12\int_{-\pi}^{0} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = -\frac{12}{2}(\pi) = 6\pi. \end{aligned}$$

b) En virtud de la simetría de la curva, el área de la elipse es $4A$ donde A es el área bajo la curva en el primer cuadrante. Las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$$\begin{cases} y &= 3\operatorname{sen}\theta \\ \\ x &= 2\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Como $dx = -2\operatorname{sen}\theta\, d\theta$ el área queda expresada en la forma:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 y(x)\,dx = -\int_0^{\pi/2} 3\operatorname{sen}\theta(-2\operatorname{sen}\theta)d\theta \\ &= 6\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = 6\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\,d\theta = 6\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\ &= 3\Big[\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Así, el área encerrada por la elipse es $4A = 6\pi$.

3. Calcule el área comprendida entre la curva $y = e^{-|x|}$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

Solución:

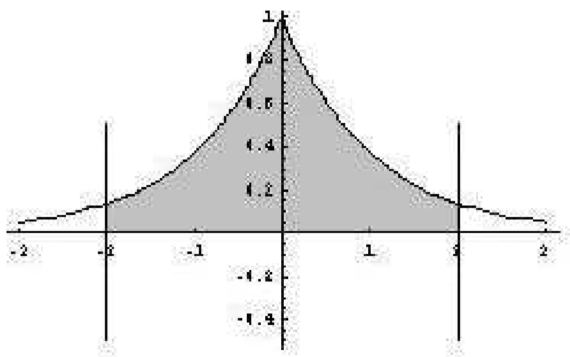


Figura 5.3: Área comprendida entre $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$, $y = e^{-|x|}$

Como $y(x) = e^{-|x|}$ es una función par, ella es simétrica con respecto al eje Y.Entonces,

$$\begin{aligned}\text{Area } &= 2\cdot\int_0^2 e^{-x}dx = 2\int_0^{-2} e^u(-du)\\ &= -2e^u\Big|_0^{-2} = -2(e^{-2}-1) = 2(1-e^{-2}).\end{aligned}$$

4. Calcule el área encerrada por la curva $y = |\operatorname{sen} x|$ y el eje X cuando $x \in [0, 4\pi]$.

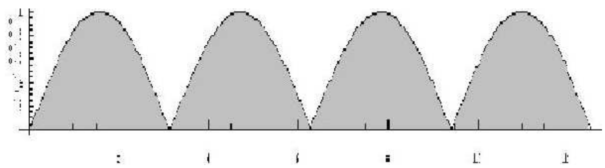


Figura 5.4: Gráfico del área comprendida entre $y = |\operatorname{sen} x|$, el eje X, con $x \in [0, 4\pi]$

Solución:

$$\begin{aligned}\text{Area } &= \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\operatorname{sen} x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \operatorname{sen} x + \int_{3\pi}^{4\pi} (-\operatorname{sen} x)dx\\ &= 2+2+2+2 = 8.\end{aligned}$$

5. Calcule el área encerrada por las curvas:

   a) $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ cuando $x \in [0, \pi]$.

   b) $y = \operatorname{sen} x$, $y = |\cos x|$ cuando $x \in [0, \pi]$.

   Solución:

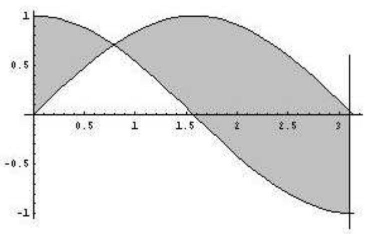


Figura 5.5: Gráfico del área comprendida entre seno y coseno entre 0yπ

a)

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= -\int_0^{\pi/4}(\operatorname{sen} x - \cos x)dx + \int_{\pi/4}^{\pi}(\operatorname{sen} x - \cos x)dx \\
&= -(-\cos x - \operatorname{sen} x)\Big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - \operatorname{sen} x)\Big|_{\pi/4}^{\pi} \\
&= -\left(-2\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) + \left(1 - \left(-2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\
&= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1 \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

b)

$$y(x) = |\cos x| = \begin{cases} \cos x, & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ -\cos x, & \text{si } x \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

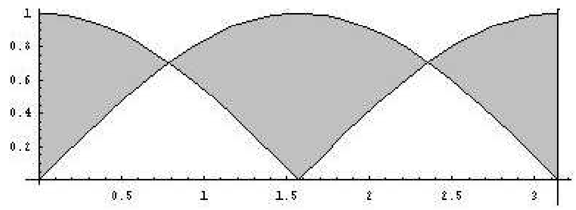


Figura 5.6: Gráfico del área comprendida entre $y = \operatorname{sen} x$ y $y = |\cos x|$, con x entre 0 y π

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= 2 \cdot \int_0^{\pi/4}(\cos x - \operatorname{sen} x) + 2 \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2}(\operatorname{sen} x - \cos x)dx \\
&= 2 \cdot (\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} + 2 \cdot (-\cos x - \operatorname{sen} x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \\
&= 2 \cdot \left(2\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + 2 \cdot \left(-1 - \left(-2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\
&= 2(\sqrt{2} - 1) + 2(\sqrt{2} - 1) = 4(\sqrt{2} - 1).
\end{aligned}$$

6. Calcule el área comprendida entre las curvas $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$, y las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

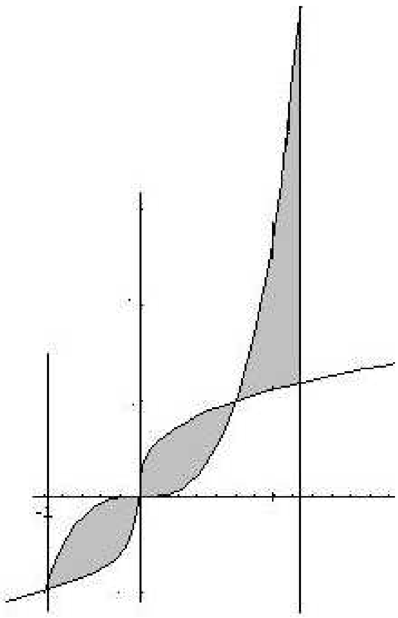


Figura 5.7: Gráfico del área comprendida entre $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$, y las rectas $x = -1$ y $x = 3$

Solución:

Observemos que el área entre las curvas en $[-1, 0]$ es igual al área en $[0, 1]$. entonces el área pedida es:

$$\begin{aligned}
\text{A} &= 2\int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^3)dx + \int_1^3 (x^3 - \sqrt[3]{x})dx \\
&= 2 \cdot \left(\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^{4/3}}{4} \right) \Bigg|_1^3 \\
&= 2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{81}{4} - \frac{\sqrt[3]{81}}{4} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right) \\
&= \frac{3}{2} + \frac{81}{4} - \frac{\sqrt[3]{81}}{4} = \frac{87 - 3\sqrt[3]{3}}{4}.
\end{aligned}$$

7. Calcular el área encerrada entre las curvas $f(x) = x^4 + x^3 + 16x - 4$ y $g(x) = x^4 + 6x^2 + 8x + 4$. Ejercicio propuesto en el libro de G.W. Bluman, (ver

bibligrafia).

Solución: Para evitar graficar los polinomios de cuarto grado, podemos trabajar con la diferencia de los polinomios $f-g$. Para calcular el área comprendida entre ambas curvas debemos conocer los puntos de intersección de ambas curvas lo que es equivalente a conocer las raices del polinomio $f-g$.

$$(f-g)(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x-2)(x-4).$$

$f(x)-g(x)=0 \iff x(x-2)(x-4)=0 \iff x=0$ ó $x=2$ ó $x=4$. Por lo tanto, el area, A, encerrada entre ambas curvas es la correspondiente cuando $x \in [0,4]$. Entonces, $A = \displaystyle\int_0^4 |f(x)-g(x)|\,dx$, para lo cual es necesario conocer el signo de $f-g$.

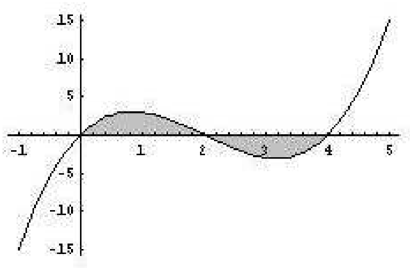


Figura 5.8: Gráfico del area encerrada entre el eje X e $y = x^3 - 6x^2 + 8x$

$$(f-g)(x) \begin{cases} \text{es positivo si} & 0 < x < 2 \\ \text{es negativo si} & 2 < x < 4. \end{cases}$$

Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \int_0^2 (f(x)-g(x))dx + \int_2^4 (g(x)-f(x))dx. \\ \int_0^2 (f(x)-g(x)) &= \int_0^2 (x^3-6x^2+8x)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right)\Big|_0^2 = 4 \\ \int_2^4 (g(x)-f(x)) &= \int_2^4 (6x^2-x^3-8x)dx = \left(2x^3 - \frac{x^4}{4} - 4x^2\right)\Big|_2^4 = 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área pedida vale 8 unidades de área.

8. Calcule el área acotada por la curva $f(x)$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 2$, donde:

$$f(x) = \begin{cases} |x - [x]| & \text{si } [x] \text{ es par} \\ |x - [x+1]| & \text{si } [x] \text{ es impar} \end{cases}$$

Solución:
Para graficar la función y visualizar la región cuya área queremos calcular, observemos que:

- Si $x \in [-2\,,\,-1[$, entonces $[x] = -2$,
- Si $x \in [-1\,,\,0[$, entonces $[x] = -1$,
- Si $x \in [0\,,\,1[$, entonces $[x] = 0$,
- Si $x \in [1\,,\,2[$, entonces $[x] = 1$.

Entonces,

$$f(x) = \begin{cases} |x - (-2)| = |x+2| = x+2 & \text{si } x \in [-2\,,\,-1[\\ |x - 0| = |x| = -x & \text{si } x \in [-1\,,\,0[\\ |x - 0| = |x| = x & \text{si } x \in [0\,,\,1[\\ |x - 2| = 2 - x & \text{si } x \in [1\,,\,2[. \end{cases}$$

Del gráfico vemos que el área es cuatro veces el área del triángulo rectángulo de base 1 y altura 1. Es decir,

$$\text{Área} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

9. Calcule el área de la región del plano acotada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

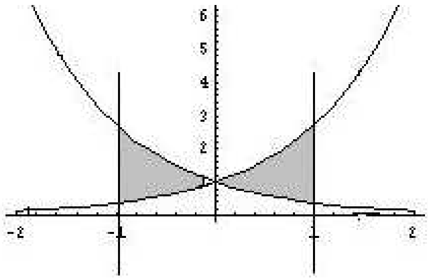


Figura 5.9: Gráfico del área acotada por por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

$$A = \int_{-1}^{0} (e^{-x} - e^x)dx + \int_{0}^{1} (e^x - e^{-x})dx.$$

- $\displaystyle\int_{-1}^{0} (e^{-x} - e^x)dx = -e^{-x} - e^x)\Big|_{-1}^{0} = -1 - 1 + e^{-1} + e = e + e^{-1} - 2.$
- $\displaystyle\int_{0}^{1} (e^x - e^{-x}) = (e^x + e^{-x})\Big|_{0}^{1} = e + e^{-1} - (1 + 1)) = e + e^{-1} - 2.$

Por lo tanto, el área pedida es : $e + e^{-1} + e + e^{-1} - 4 = 2(e + e^{-1} - 2)$.

10. Calcule el área de la región del plano acotada por las curvas $y = \cosh x$ e $y = 2$.

Solución:

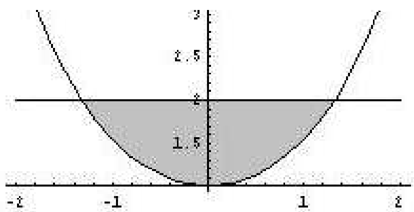


Figura 5.10: Gráfico del area entre $y = \cosh x$ e $y = 2$

Sea x_0 tal que $\cosh x_0 = 2$.

$$x_0 = \text{arccosh}\,(2) \iff 2 = \cosh x_0 \iff x_0 = \ln(2+\sqrt{3}).$$

$$\begin{aligned} \text{A} \ &= 2\int_0^{x_0}(2-\cosh x)dx = 2(2x-\operatorname{senh} x)\Big|_0^{x_0} \\ &= 2(2x_0 - \operatorname{senh} x_0). \end{aligned}$$

Usando la identidad fundamental de las funciones hiperbólicas:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = -1,$$

tenemos que:

$$\operatorname{senh}^2 x_0 = \cosh^2 x_0 + 1 = 5.$$

Por lo tanto, el área pedida vale: $2(2\ln(2+\sqrt{5}) - \sqrt{5})$.

11. Demuestre que el área de la región acotada por la curva llamada **astroide** es $\dfrac{3}{2}\pi$. Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned} x(t) \ &= 2\,\cos^3 t \ \ ,\ t \in [0, 2\pi]. \\ y(t) \ &= 2\,\operatorname{sen}^3 t \ \ ,\ t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Su ecuación en coordenadas cartesianas es $x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{2/3}$.
Solución:

Usando la simetría de la curva tenemos que:

$$\text{Area} \ = 4\int_0^2 y(x)\,dx.$$

Escribiendo la integral en términos del parámetro t, nos queda:

$$\text{Area} \ = 4\int_0^2 y(x(t))\frac{dx(t)}{dt}\,dt = -4\int_0^{\pi/2} 2\operatorname{sen}^3 t \cdot 6\cos^2 t(-\operatorname{sen} t)dt.$$

Así,

$$\begin{aligned} \text{A} \ &= 48\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t \cos^2 dt = 48\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t(1-\operatorname{sen}^2 t)\,dt \\ &= 48\left[\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t dt - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 t dt\right]. \end{aligned} \tag{5.1}$$

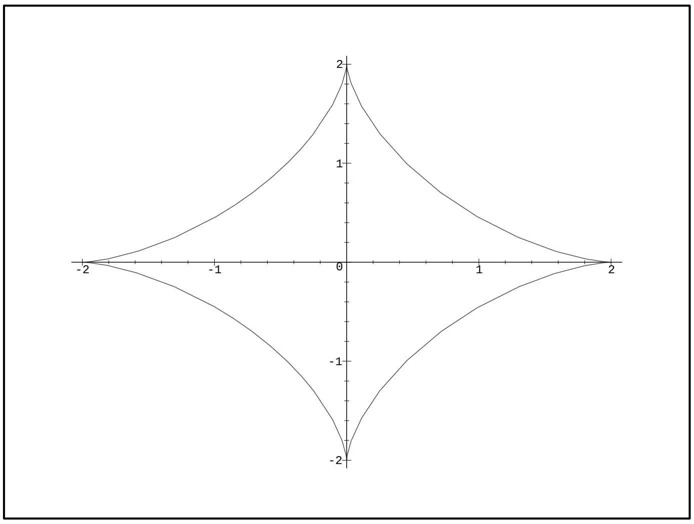


Figura 5.11: Astroide

Para calcular cada una de las integrales que nos conducirán al valor del área, usaremos las fórmulas de reducción estudiadas en el capítulo 4.

$$I_n = \int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 t dt = -\frac{\operatorname{sen}^5 t \cos t}{6}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{5}{6}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t dt = \frac{5}{6}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t dt.$$

Ahora calculamos,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t dt = -\frac{\operatorname{sen}^3 t \cos t}{4}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t dt = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t dt.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2t \, dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos 2t)\cdot 2dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \cos v \, dv = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t dt = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Reemplazando los valores de las integrales en la ecuación 5.1 obtenemos el valos pedido:

$$\mathrm{A} = 48\Big[\frac{3\pi}{16} - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}\Big] = \frac{3\pi}{2}.$$

12. Encuentre $n \in \mathbb{N}$ tal que el área encerrada por las curvas x^n y $x^{1/n}$ sea igual a $\frac{1}{2}$.

Solución:

Estas curvas encierran área sólo si $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} \text{A} &= \int_0^1 (x^{1/n} - x^n)dx = \int_0^1 x^{1/n}dx - \int_0^1 x^n dx = \\ &= \left[\frac{x^{(1/n)+1}}{(1/n)+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}. \end{aligned}$$

Como queremos que el área sea igual a $\frac{1}{2}$, debemos resolver la ecuación:

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{2},$$

lo que da el valor $n = 3$.

13. ¿Cúal es el área A_k comprendida entre la curva $y = x \operatorname{sen} x$, el eje X y las abscisas $x = k\pi$ y $x = (k+1)\pi$? $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots$
Calcule el área A_n comprendida entre las abscisas 0 y $n\pi$.

Solución:

Observemos que el área pedida es

$$\text{A} = \int_0^{n\pi} x|\operatorname{sen} x|\, dx.$$

Como x es positiva en el intervalo de integración, basta analizar el signo de $\operatorname{sen} x$.

$$\operatorname{sen} x \begin{cases} \text{es positiva si} & x \in [2k\pi\, ,\, (2k+1)\pi] \\ \text{es negativa si} & x \in [(2k+1)\pi\, ,\, 2k\pi]. \end{cases}$$

La integral

$$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x \operatorname{sen} x dx,$$

se calcula por partes y obtenemos:

$$\begin{aligned}
I_k &= -x \cdot \cos x \Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi} + \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \cos x \, dx = \\
&= -(k+1)\pi \cos(k+1)\pi + k\pi \cos k\pi + \operatorname{sen} x \Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi} \\
&= -(k+1)\pi \left[\cos(k\pi)\cos\pi - \operatorname{sen} k\pi \operatorname{sen} \pi\right] + k\pi \cos(k\pi) = \\
&= (k+1)\pi \cos(k\pi) + k\pi \cos(k\pi) = (2k+1)\pi \cos(k\pi) \\
&= (-1)^k (2k+1)\pi.
\end{aligned}$$

Ya que $\cos k\pi = (-1)^k$. Como se trata de calcular el área tenemos,

$$A_k = |I_k| = (2k+1)\pi$$

Para calcular el área comprendida entre 0 y $n\pi$ observemos que:

$$\begin{array}{lll}
\text{Si } n = 1, & \text{área} & = \pi. \\
n = 2 & \text{área} & = \pi + 3\pi = 4\pi. \\
n = 3 & \text{área} & = \pi + 3\pi + 5\pi = 9\pi \\
n = 4 & \text{área} & = \pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi = 16\pi \\
n = 5 & \text{área} & = \pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi + 9\pi = 25\pi.
\end{array}$$

Con estos cálculos podemos intuir que

$$A_n = n^2\pi.$$

Esto puede ser demostrado por inducción y se deja al estudiante.

14. Calcular el área encerrada por la curva polar $r = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, estudiada en la sección **??** ejemplo 2.6.19.

Solución: Sabemos que el área encerrada por una curva en coordenadas polares está determinada por:

$$A = \int_a^b \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad ; [a,b] \quad \text{intervalo de variación de } \theta$$

En nuestro caso la curva existe en el intervalo $[0, 4\pi]$, pero debemos restar algunas áreas que se repiten:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{4\pi} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta - \int_{\frac{7}{2}\pi}^{4\pi} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta\right\}\\
&= \frac{1}{4}\left\{\int_0^{4\pi}(1-\cos(\theta))d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos(\theta))d\theta - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi}(1-\cos(\theta))d\theta - \int_{\frac{7}{2}\pi}^{4\pi}(1-\cos(\theta))d\theta\right\}\\
&= \frac{1}{4}\left\{(\theta-\operatorname{sen}(\theta))\Big|_0^{4\pi} - (\theta-\operatorname{sen}(\theta))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - (\theta-\operatorname{sen}(\theta))\Big|_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} - (\theta-\operatorname{sen}(\theta))\Big|_{\frac{7}{2}\pi}^{4\pi}\right\}\\
&= \frac{1}{4}\left\{4\pi - \frac{\pi}{2} + 1 - \left[\left(\frac{5}{2}\pi - \operatorname{sen}\frac{5}{2}\pi\right) - \left(\frac{3}{2}\pi - \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right)\right] - \left[(4\pi - 0) - \left(\frac{7}{2}\pi - \operatorname{sen}\frac{7}{2}\pi\right)\right]\right\}\\
&= \frac{1}{4}\left\{4\pi - \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{5}{2}\pi + \operatorname{sen}\frac{5}{2}\pi + \frac{3}{2}\pi - \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi - 4\pi + \frac{7}{2}\pi - \operatorname{sen}\frac{7}{2}\pi\right\}\\
&= \frac{1}{4}\{2\pi + 1 + 1 + 1 + 1\} = \frac{1}{4}\{2\pi + 4\} = \frac{\pi}{2} + 1
\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

1. Calcule el área de la región encerrada por las curvas $y = x^n$ e $y = x^m$, $n, m \in \mathbb{N}$.

2. Demuestre que el área de la región encerrada por un arco de la **cicloide** y el eje X es $3\pi a^2$. Las ecuaciones paramétricas de esta curva son :

$$\begin{cases} x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

donde a es una constante positiva y $\theta \in \mathbb{R}$.

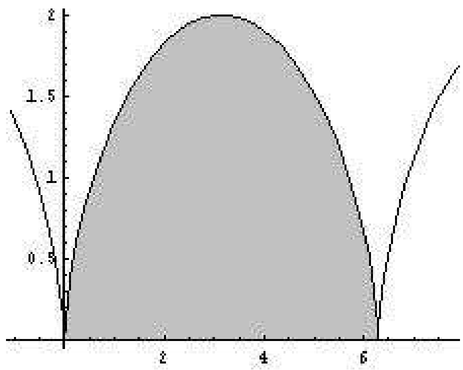


Figura 5.12: Cicloide

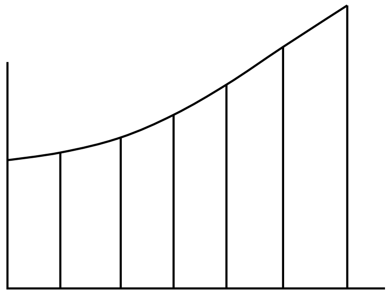
5.2. Cálculo de longitudes de curvas

5.2.1. Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas rectangulares

Nuestro objetivo es ahora calcular la longitud del gráfico de la curva f entre a y b.

Supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función con derivada continua.
Consideremos pa partición del intervalo $[a, b]$:

$$\{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, \ldots, a + (n-1)\frac{b-a}{n}, b\}.$$



Si denotamos por L_i la longitud de la poligonal entre $[t_{i-1}, f(t_{i-1})]$ y $[t_i, f(t_i)]$ con $i = 1, 2, \ldots, n$, tenemos

$$L_i = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2}.$$

El teorema del valor medio asegura la existencia de un número $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$, tal que:

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Así,

$$L_i = |t_i - t_{i-1}|\sqrt{1 + (f'(c_i))^2}.$$

Por lo tanto, la longitud de la poligonal es

$$\sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i+1}|\sqrt{1 + (f'(c_i))^2}. \tag{5.2}$$

Como f tiene derivada continua, entonces la función $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ definida sobre $[a, b]$ y con valores en $\mathbb{R}$ es continua y por lo tanto integrable. La ecuación 5.2 es una suma de Riemann de g, así cuando $n \to +\infty$, dichas sumas convergen hacia la integral de g.

$$\int_a^b g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i+1}|g(c_i).$$

En consecuencia, la longitud de la curva f entre $x = a$ y $x = b$ es:

$$L_f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Esta última fórmula representa la manera de calcular la longitud de un gráfico de una función.

Ejemplo 5.2.1 Calcularemos la longitud de un círculo centrado en el origen y de radio r.
Sea $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$

$$L_f = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Por lo tanto,

$$L_f = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = r \int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Si consideramos el cambio de variable $rv = x$, entonces $rdv = dx$, lo que implica

$$\int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r^2 \int_{-1}^{1} \frac{dv}{r} \cdot \frac{1}{r\sqrt{1 - v^2}} = r \int_{-1}^{1} \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Haciendo nuevamente un cambio de variable:

$$\begin{cases} v = \operatorname{sen}\theta \\ dv = \cos\theta\, d\theta, \end{cases}$$

la integral se reduce a :

$$r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = r\Big(\frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = r\pi.$$

Por lo tanto,

$$L_f = r \cdot \int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r\pi$$

Ya que el círculo tiene dos veces esta longitud se cumple que

$$\text{Longitud del círculo} = 2\pi r.$$

5.2.2. Cálculo de longitudes de curvas dadas por ecuaciones paramétricas

En esta sección vamos a calcular longitudes de arco de curvas expresadas mediante ecuaciones paramétricas. Para ello se recomienda al estudiante recordar lo visto en la subseccion **??** del capítulo 2 para graficar este tipo de curvas. Consideremos la curva parametrizada:

$$\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t). \end{cases}$$

De lo visto en la sección anterior, sabemos que la longitud de la curva $y = h(x)$ en $[a, b]$ está dada por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (h'(x))^2}\, dx,$$

donde $a = f(t_0)$ y $b = f(t_1)$. Como $h'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ entonces,

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + (h'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} dx \\ &= \int_a^b \frac{dt}{dx} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dx = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{cases} x(t_0) = a \\ x(t_1) = b. \end{cases}$$

Ejemplo 5.2.2 Calcular la longitud de arco de la curva

$$\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = 2t^{9/2} - 4, \quad 1 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Solución: Tenemos $x' = 3t^2 \quad , y' = 9t^{7/2}$. Luego,

$$L = \int_1^3 \sqrt{9t^4 + 81t^7}dt = 3\int_1^3 t^2\sqrt{1+9t^3}dt$$

Usando el cambio de variable :

$$u = 1 + 9t^3,\ du = 27t^2dt,$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{9}\int_1^3 27t^2\sqrt{1+9t^3}dt = \frac{1}{9}\int_{10}^{244}\sqrt{u}du \\ &= \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{3/2}\Big|_{10}^{244} = \frac{2}{27}\left(1+9t^3\right)^{3/2}\Big|_1^3 = \\ &= \frac{2}{27}\left((244)^{3/2} - 10^{3/2}\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2.3 Encuentre la longitud del arco de la cicloide:

$$\begin{cases} x = a(\theta - \text{ sen } \theta) \\ y = a(1-\cos\theta). \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta \\ &= a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \text{ sen}^2\theta} = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos\theta+1}d\theta = \\ &= a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}d\theta = \sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos\theta}d\theta. \end{aligned}$$

Para calcular esta integral usaremos la fórmula trigonométrica

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \iff \sqrt{2}\text{ sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{1-\cos\theta}.$$

Usando el cambio de variable: $u = \dfrac{\theta}{2}$, entonces $du = \dfrac{d\theta}{2}$,es decir, $2du = d\theta$. Entonces nos queda:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{2}a\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\text{sen}\,\frac{\theta}{2}d\theta = 2a\cdot\int_0^{\pi}\text{sen}\,u\cdot 2\,du \\ &= 4a(-\cos u)\Big|_0^{\pi} = 8a. \end{aligned}$$

5.2.3. Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas polares

Vamos ahora a obtener una fórmula explícita para la longitud de una curva en coordenadas polares.

Como ya sabemos

$$\begin{cases} x(\theta) = r\cos\theta \\ y(\theta) = r \text{ sen } \theta. \end{cases}$$

Si $r = f(\theta)$ entonces:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= f(\theta)\cos\theta \quad , \frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta \\ y(\theta) &= f(\theta)\operatorname{sen}\theta \quad , \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta \end{aligned}$$

y, entonces

$$\begin{aligned} s &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta)^2 + (f'(\theta)\text{ sen } \theta - f(\theta)\cos,\theta)^2} d\theta = \\ s &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(f'(\theta)^2) + (f(\theta))^2} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta \end{aligned}$$

que es la expresión buscada.

Ejemplo 5.2.4 Encuentre la longitud de arco de la curva: $r = 3e^{2\theta}, \theta \in [0, \pi/6]$ en el plano (x, y).

Solución:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\pi/6} \sqrt{9e^{4\theta} + 36e^{4\theta}} d\theta = \int_0^{\pi/6} \sqrt{45e^{4\theta}} d\theta \\ &= 3\sqrt{5}\int_0^{\pi/6} e^{2\theta} d\theta = \left(\frac{3}{2}\sqrt{5}e^{2\theta}\right)_0^{\pi/6} = \\ s &= \frac{3}{2}\sqrt{5}\left(e^{\pi/3} - 1\right) \end{aligned}$$

Ejercicios resueltos

1. Calcule la longitud de un círculo, usando:

   a) Su ecuación en coordenadas rectangulares.

   b) Sus ecuaciones paramétricas.

   Solución:

   a) $x^2 + y^2 = r^2 \Longleftrightarrow y^2 = r^2 - x^2 \Longleftrightarrow y(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; $-r \leq x \leq r$.

   Usando la simetría de la curva:

   $$L = 2 \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx;$$

   con $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

   Lo cuál implica que:

   $$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

   Por lo tanto:

   $$L = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 2 \cdot \int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$

   Usando la sustitución,$x = r \operatorname{sen}\theta,\ dx = r\cos\theta d\theta$

   $$L = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r \cdot r\cos\theta d\theta}{\sqrt{r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta}} = 2r\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = 2r\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\pi r$$

   b) Las ecuaciones paramétricas del círculo son:

   $$\begin{cases} x(t) = r\cos t, \\ \\ y(t) = r \operatorname{sen} t, t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

   Así, $L = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt =$

   $$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\operatorname{sen} t)^2 + (r\cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

2. Calcule la longitud de las siguientes curvas en un intervalo cualquiera $[0, x]$.

   a) La catenaria: $y = \cosh x$

   b) La parábola: $y = x^2$

   c) La parábola semicúbica: $y = x^{3/2}$

Solución:

a)

$$L = \int_0^x \sqrt{1+(y'(x))^2}dx = \int_0^x \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 x} = \\ = \int_0^x \cosh x dx = \operatorname{senh} x \Big|_0^x = \operatorname{senh} x$$

b) $L = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+(y')^2}du = \int_0^x \sqrt{1+4u^2}dv$

Sea $2u = \operatorname{senh} v \to 1 + 4v^2 = 1 + \operatorname{senh}^2 v = \cosh^2 v$

$2du = \cosh v dv$

$$\int_0^x \sqrt{1+4v^2}dv = \int_0^{\text{arcsenh }(2x)} (\cosh v) \cdot \frac{\cosh v}{2} dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\text{arcsenh }(2x)} \cosh^2(v)dv = I$$

Como $\cosh(2v) = \cosh^2 v + \operatorname{senh}^2 v =$

$$\begin{aligned} &= \cosh^2 v + \cosh^2 v - 1 = 2\cosh^2 v - 1 \\ &\Rightarrow \frac{\cosh(2v)+1}{2} = (\cosh v)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^{\text{arcsenh }(2x)} \frac{1+\cosh(2v)}{2}dv = \\ &= \frac{1}{4}\text{arcsenh }(2x) + \frac{1}{4}\int_0^{\text{arcsenh }(2x)} \cosh(2v)dv \\ I &= \frac{1}{4}\text{arcsenh }(2x) + \frac{1}{8}\operatorname{senh}(2 \cdot \text{arcsenh }(2x)) \end{aligned}$$

c) Si $y = x^{3/2}$, entonces $y' = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$.

Luego:

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$$

Por lo tanto,

$$L = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{9}{4}u}du$$

$$\text{Sea } v = 1 + \frac{9}{4}u$$
$$\text{Entonces } dv = \frac{9}{4}du$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&= \int_1^{1+\frac{9}{4}x} \sqrt{v} \cdot \frac{4}{9}dv \\
&= \frac{4}{9}\int_1^{1+\frac{9}{4}x} \sqrt{v}dv \\
&= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}v^{3/2}\Big|_1^{1+\frac{9}{4}x} \\
&= \frac{8}{27} \cdot \left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} - 1\right]
\end{aligned}$$

3. Calcule la longitud de la curva dada por:

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-t}\cos t \\
y(t) &= e^{-t}\operatorname{sen} t \ \ , \ t \in [0, \pi/2].
\end{aligned}$$

Solución:
$x'(t) = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\operatorname{sen} t$
$y'(t) = -e^{-t}\operatorname{sen} t + e^{-t}\cos t$

$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 =$

$e^{-2t}\cos^2 t + 2e^{-2t}\cos t \operatorname{sen} t + e^{-2t}\operatorname{sen}^2 t + e^{-2t}\operatorname{sen}^2 t - 2e^{-2t}\operatorname{sen} t \cos t + e^{-2t}\cos^2 t = 2e^{-2t}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{2e^{-2t}}dt = \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} e^{-t}dt \qquad u = -t, du = -dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^{-\pi/2} e^{u}(-du) = -\sqrt{2}\int_0^{-\pi/2} e^{u}dv = -\sqrt{2}e^{u}\Big|_0^{-\pi/2} = \\
&= -\sqrt{2}[e^{-\pi/2} - 1] = \sqrt{2}[1 - e^{-\pi/2}]
\end{aligned}$$

4. Demuestre que la longitud de la curva llamada **astroide** es 12. Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2\cos^3 t \\
y(t) &= 2\operatorname{sen}^3 t \ \ , \ t \in [0, 2\pi].
\end{aligned}$$

Su ecuación en coordenadas cartesianas es $x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{2/3}$.

Solución: $L = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$

$$\begin{aligned}
x'(t) &= -6\cos^2 t \operatorname{sen} t \Rightarrow (x'(t))^2 = 36\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t \\
y'(t) &= 6\operatorname{sen}^2 t \cos t \Rightarrow (y'(t))^2 = 36\operatorname{sen}^4 t \cos^2 t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x')^2 + (y')^2} &= \sqrt{36\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + 36\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t} = \\
&= 6\sqrt{\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t(\cos^2 + \operatorname{sen}^2 t)} = 6 \cdot \sqrt{\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t} \\
&= 6|\cos t \operatorname{sen} t|
\end{aligned}$$

Sea $h(t) = \cos t \operatorname{sen} t$.

Esta función es ≥ 0 si $t \in [0, \pi/2], \leq 0$ si $t \in [\pi/2, \pi]$, ≥ 0 si $t \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ y ≤ 0 si $t \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

Así, $L = \displaystyle\int_0^{2\pi} 6|\operatorname{sen} t \cos t| dt = 6 \cdot \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t \cos t dt - 6 \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} t \cos t dt +$
$6 \displaystyle\int_{\pi}^{3\pi/2} \operatorname{sen} t \cos t dt - 6 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t dt$

Si $u = \operatorname{sen} t,\ du = \cos t dt$

$$\begin{aligned}
\text{Por lo tanto, } L &= 6 \cdot \int_0^1 u du - 6 \cdot \int_1^0 u du + 6 \int_0^{-1} u du - 6 \int_{-1}^0 u du \\
&= 6 \cdot \int_0^1 u du + 6 \int_0^1 u du - 6 \int_1^0 u du - 6 \int_{-1}^0 u du = \\
&= 12 \cdot \int_0^1 u du - 12 \int_{-1}^0 u du = 12 \cdot \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1 - 12 \cdot \left.\frac{u^2}{2}\right|_1^0 = \\
&= 12 \cdot \frac{1}{2} - 12 \cdot \left(0 - \frac{1}{2}\right) = 6 + 6 = 12.
\end{aligned}$$

5. Demuestre que la longitud de la curva llamada **cardioide** es $16a$. Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2a\ \cos t(1 + \cos t) \\
y(t) &= 2a\ \operatorname{sen} t(1 + \cos t)\ \ ,\ t \in [0, 2\pi].
\end{aligned}$$

Su ecuación en coordenadas cartesianas es $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$.

Solución: $\begin{aligned} x'(t) &= -2a \operatorname{sen} t - 4a \operatorname{sen} t \cos t = -2a \operatorname{sen} t - 2a \operatorname{sen}(2t) \\ y'(t) &= 2a \cos t + 2a \cos^2 t - 2a \operatorname{sen}^2 t = 2a \cos t + 2a \cos(2t) \end{aligned}$

Así,

$$\begin{aligned}
(x'(t))^2 + (y'(t))^2 &= 4a^2 \operatorname{sen}^2 t + 8a^2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(2t) \\
&\quad + 4a^2 \operatorname{sen}^2(2t) + 4a^2 \cos^2 t + 8a^2 \cos t \cos^2(2t) + 4a^2 \cos^2(2t) \\
(x'(t))^2 + (y'(t))^2 &= 4a^2 + 8a^2(\cos t \cos 2t + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t) + 4a^2 \\
&= 8a^2 + 8a^2 \cos(t) \\
&= 8a^2(1 + \cos t) \\
&= 8a^2 \cdot 2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Así, } L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2+(y')^2}dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{16a^2\cos^2(t/2)} = \int_0^{2\pi} 4a|\cos(t/2)|dt = \\
&= 4a\int_0^{\pi}\cos(t/2)dt - 4a\int_{\pi}^{2\pi}\cos(t/2)dt \\
2v &= t \Rightarrow 2dv = dt \\
L &= 4a\int_0^{\pi/2}\cos v\cdot 2dv - 4a\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(v)\cdot 2dv \\
L &= 8a\operatorname{sen} v\Big|_0^{\pi/2} - 8a\operatorname{sen} v\Big|_{\pi/2}^{\pi} \\
&= 16a.
\end{aligned}
$$

6. Verificar que el cálculo de la longitud de la curva $r = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$, da origen a una integral elíptica.

Solución: Del estudio de esta curva hecho en la seccion **??**, ejemplo 2.6.19 tenemos que:

$$
\frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta)
$$

$$
\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \left[\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right]^2 + \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\theta\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\cos\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \\
&\quad \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\theta \\
&= \frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta}{2}\left[\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right] + \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\left[\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right] \\
&= \frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

Luego la longitud L de la curva es:

$$L = \int_0^{4\pi} \sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta \approx 9,688448224 \quad \textit{unidades} \tag{5.3}$$

Nota: La integral L es una integral elíptica, para resolverla se utilizó un método numérico.

nnnnnnnnnnn

5.3. Volúmenes y áreas de superficies de sólidos de revolución

Definición 5.3.1 Llamaremos **sólido de revolución** a la figura que se obtiene al girar una región plana (dos dimensiones) en torno a un eje de rotación que está fijo.

Ejemplo 5.3.2 Los sólidos de revolución más simples son:

1. El **cilindro circular recto**, que se obtiene al girar un rectángulo en torno a uno de sus lados que se mantiene inmóvil.
2. El **cono circular recto**, que se obtiene al girar un triángulo sobre uno de sus lados.
3. La **esfera** se genera al girar una circunferencia en torno a su diámetro.
4. El **toro** se genera cuando un círculo rota en torno a un eje externo a él.

Nuestro objetivo es calcular los volúmenes de sólidos de revolución que se generan al girar una región cualquiera del plano XY en torno a un eje de rotación.

5.3.1. Método de los discos

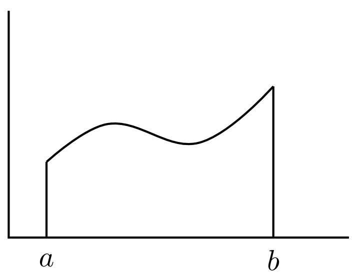
Teorema 5.3.3 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Entonces el volumen del sólido que se obtiene al girar la región R:

$$R = \{(x, y) : x \in [a, b]\,,\, 0 \leq y \leq f(x)\ \}$$

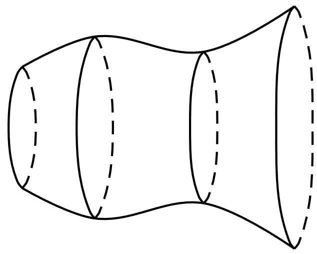
en torno al eje X está dado por la fórmula:

$$V = \pi \int_a^b \Big[f(x)\Big]^2\, dx.$$

Demostración:



Si hacemos rotar el gráfico de f en torno al eje x obtenemos una superficie en el espacio tridimensional, $S_f \subset \mathbb{R}^3$.



Vamos a calcular el volumen de esta superficie S_f.

Sea $t_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ con $i = 0, 1, \ldots, n$. En $[t_{i-1}, t_i]$ consideremos un punto c_i y entonces el rectángulo de base $t_i - t_{i-1}$ y altura $f(c_i)$. Al rotar este rectángulo alrededor del eje x, tenemos un cilindro de volumen $\pi(f(c_i))^2(t_i - t_{i-1})$ y entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \pi(f(c_i))^2(t_i - t_{i-1})$ es una aproximación del volumen de S_f. En general si $g(x) = \pi(f(x))^2$, entonces denotando por $\mathcal{P}_n$ la partición $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ tenemos

$$I(\mathcal{P}_n, g) \leq \sum_{i=1}^{n} \pi(f(c_i))^2(t_i - t_{i-1}) \leq S(\mathcal{P}_n, g)$$

así que si $n \to \infty$,

$$V(S_f) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \ \blacksquare$$

Observación 5.3.4 Este método se puede usar, también, para calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar una curva, definida por la función $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, alrededor de una recta $y = y_0$. La única condición es que la recta y la curva no se intersecten. En este caso el volumen requerido es

$$V(S_f) = \pi \int_a^b (y_0 - f(x))^2 dx.$$

5.3.2. Método de las cortezas o cilindros

Ahora calcularemos el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar una curva alrededor del eje Y.

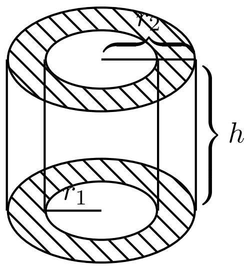
Teorema 5.3.5 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Entonces el volumen del sólido que se obtiene al girar la región R:

$$R = \{(x, y) : x \in [a, b]\,,\ 0 \leq y \leq f(x)\ \}$$

en torno al eje Y está dado por la fórmula:

$$V(S_f) = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx.$$

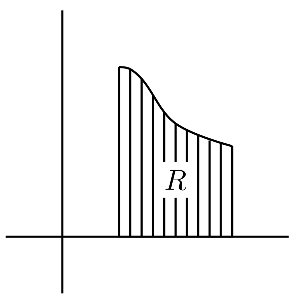
Demostración: Para calcular este volumen , el sólido obtenido se divide en cortes cilíndricos que de alguna manera se asemejan a cortezas de árboles, que es de donde viene el nombre del método. Un corte cilíndrico es el sólido que se forma entre dos cilindros concéntricos. Calculemos el volumen de un corte cilíndrico formado por dos cilindros de radios r_1 y r_2 , como se muestra en la siguiente figura:



Tenemos:

$$\begin{aligned}
V &= \pi h r_2^2 - \pi h r_1^2 = \pi h (r_2^2 - r_1^2) \\
&= 2\pi h \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) (r_2 - r_1) \quad \text{ó si} \\
\overline{r} &= \frac{r_1 + r_2}{2}, \; \Delta r = r_2 - r_1 \\
V &= 2\pi h \overline{r} \Delta r.
\end{aligned}$$

Notamos que $2\pi\overline{r}$ es el perímetro de la circunferencia de radio $\overline{r}$ y Δr es el ancho del corte. El número h representa la altura de los cilindros.



Sea $P = \{a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. En cada $[x_{i-1}, x_i]$ sean ξ_i, η_i los puntos que satisfacen $f(\xi_i) \leq f(x) \leq f(\eta_i)$ para cada $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Ahora, formamos dos cortes cilindrícos de radios iguales x_i y x_{i+1} con alturas $f(\xi_i)$ y $f(\eta_i)$. Aplicando la fórmula anterior a cada corte cilíndrico, tenemos los volúmenes $V(t_i)$ y $V(T_i)$ dados por:

$$\begin{aligned} V(t_i) &= 2\pi f(\xi_i) \cdot \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ V(T_i) &= 2\pi f(\eta_i) \cdot \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, una aproximación del volumen del sólido de revolución es:

$$\sum_{i=0}^{n-1} V(t_i) \leq V(S_f) \leq \sum_{i=0}^{n-1} V(T_i)$$

y la igualdad se verifica en el límite, siempre que la norma de la partición tienda a cero con $n \to \infty$. Luego

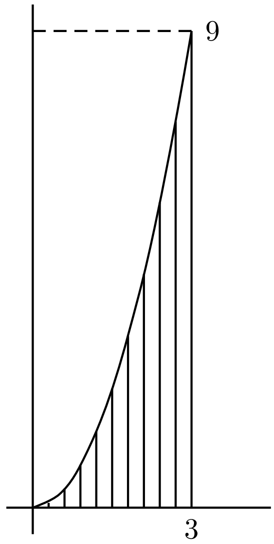
$$V(S_f) = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx. \quad \blacksquare$$

Observación 5.3.6 Cuando la región está acotada por las rectas $y = c$, $y = d$, $x = g(y)$ y $x = 0$, con $g(y) \geq 0$ y el sólido de revolución es el obtenido al rotar esta región alrededor del eje X, entonces el respectivo volumen es,

$$V(S_f) = 2\pi \int_c^d y g(y) dy.$$

Ejemplo 5.3.7 1. La región R está acotada por $y = x^2, y = 0, x = 3$y se rota alrededor del eje Y. Encuentre el volumen del sólido generado.

Solución:



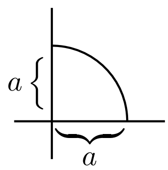
$$f(x) = x^2; \quad a = 0, b = 3$$

$$V(S_f) = 2\pi \int_0^3 x^2 \cdot x dx = 2\pi \frac{x^4}{4} \int_0^3$$

$$V(Sf) = \frac{81}{2}\pi.$$

2. La región acotada por el eje X , el eje Y y la curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ es rotada alrededor del eje Y. Encuentre el volumen del sólido generado.

Solución:



$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} V(S_f) &= 2\pi \int_0^a x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= -\pi \int_0^a -2x\sqrt{a^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Usando el cambio de variable:

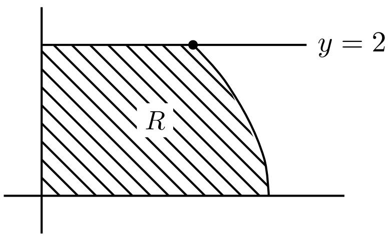
$$\begin{cases} u = a^2 - x^2 \\ du = -2xdx, \end{cases}$$

tenemos que el volumen es:

$$\begin{aligned} V(S_f) &= -\pi \int_{a^2}^{0} \sqrt{u}du \\ &= -\pi \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{a^2}^{0} = \frac{\pi}{3} 2a^3 = \frac{2}{3}\pi a^3. \end{aligned}$$

3. La región R acotada por el eje X, el eje Y , la recta $y = 2$ y la parábola $x = 3 - \dfrac{1}{4}y^2$ es rotada alrededor del eje X. Encuentre el volumen generado.

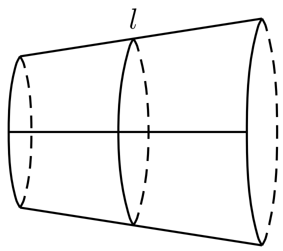
Solución:



$$\begin{aligned} V(S_f) &= 2\pi \int_0^2 y \cdot \left(3 - \frac{1}{4}y^2\right) dy = \\ &= 2\pi \int_0^2 \cdot \left(3y - \frac{1}{4}y^3\right) dy = \\ &= 2\pi \left(3\frac{y^2}{2} - \frac{1}{16}y^4\right) \Big|_0^2 \\ &= 2\pi(6-1) = 10\pi. \end{aligned}$$

5.3.3. Áreas de superficies de revolución

Vamos ahora a calcular el área del sólido de revolución S_f.

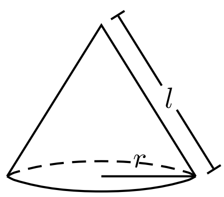


Consideremos el segmento que une $(t_{i-1}, f(t_{i-1}))$ y $(t_i, f(t_i))$ y lo hacemos rotar en torno del eje X.

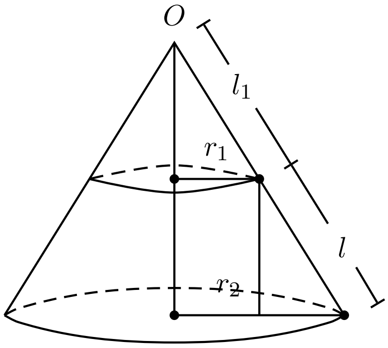
Al hacer esta rotación obtenemos un tronco de cono, cuya área es una aproximación del área de la superficie, S_f, entre los puntos $(t_{i-1}, f(t_{i-1}))$ y $(t_i, f(t_i))$. La arista del cono es

$$\mathcal{L} = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2}.$$

Consideremos un cono de radio basal r y altura lateral l. Este cono tiene área $A_c = \pi \cdot r \cdot l$.



Consideremos un cono y dos cortes en r_1 y r_2 con altura l_1 y $l + l_1$. De acuerdo a nuestra fórmula el área del tronco del cono es $\pi(l + l_1)r_2 - \pi l_1 r_1$.



Como $\dfrac{l_1}{r_1} = \dfrac{l}{r_2 - r_1}$ entonces, $l_1 = \frac{lr_1}{r_2 - r_1}$. Por lo tanto, el área del tronco de cono es:

$$\begin{aligned}
\pi\Big(l + \frac{lr_1}{r_2 - r_1}\Big)r_2 - \pi l_1 r_1 &= \pi\Big(\frac{lr_2 - lr_1 + lr_1}{r_2 - r_1}\Big)r_2 - \pi\frac{lr_1}{r_2 - r_1}r_1 \\
&= \pi\frac{lr_2^2}{r_2 - r_1} - \frac{\pi l r_1^2}{r_2 - r_1} \\
&= \pi l\frac{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)}{r_2 - r_1} = \pi l(r_2 + r_1)
\end{aligned}$$

Así, aplicando lo anterior, obtenemos que el tronco de cono de radios $f(t_i)$ y $f(t_{i-1})$, tiene área

$$\begin{aligned}
\pi l(f(t_i) + f(t_{i-1})) &= \pi(f(t_i) + f(t_{i-1}))\sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2} \\
&= \pi(f(t_i) + f(t_{i-1}))\sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + f'(c_i)^2(t_i - t_{i-1})^2} \\
&= \pi(f(t_i) + f(t_{i-1}))\sqrt{1 + (f'(c_i))^2}(t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, una aproximación del área de S_f es

$$A = \sum_{i=1}^{n} \pi(f(t_i) + f(t_{i-1}))\sqrt{1 + (f'(c_i))^2}(t_i - t_{i-1}).$$

Podemos aproximar $f(c_i) = \dfrac{f(t_i) + f(t_{i-1})}{2}$, es decir,

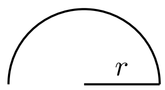
$$A \simeq \sum_{i=1}^{n} \pi 2f(c_i)\sqrt{1 + (f'(c_i))^2}(t_i - t_{i-1}).$$

Por lo tanto, si $g(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ se tiene en el límite

$$A(S_f) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Ejemplo 5.3.8 Calcularemos el volumen y el área de una esfera de radio r.

Sea $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$.



$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx = \pi \int_{-r}^{r} r^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} x^2 dx \\
&= \pi r^2 x \Big|_{-r}^{r} - \pi \frac{x^3}{3}\Big|_{-r}^{r} \\
&= \pi(r^3 + r^3) - \frac{\pi}{3}(r^3 + r^3) = 2\pi r^3 - \frac{2\pi}{3} r^3 \\
&= \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3}{3} = \frac{4\pi}{3} r^3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}dx \\
&= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}dx = 2\pi \cdot r 2r = 4\pi r^2.
\end{aligned}
$$

Ejercicios resueltos

1. *a*) Calcule el volumen de una esfera generada al girar el semicírculo $x^2 + y^2 = a^2$, en torno a su diámetro.

   b) Calcule el área de la superficie de la esfera considerada en (a).

Solución:

a) $V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$

$$y^2 = a^2 - x^2, \quad -a \leq x \leq a$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)dx = \pi \cdot \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-a}^{a} \\
&= \pi \left[a^3 - \frac{a^3}{3} - (-a^3 + \frac{a^3}{3})\right] = \pi \left[2a^3 - \frac{2}{3}a^3\right].
\end{aligned}
$$

Así, $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi a^3}$.

b) Área $= 2\pi \displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$

Como $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ entonces $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Así,

$$f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}=f(x)\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}.$$

Por lo tanto,

$$A=2\pi\int_{-a}^{a}adx=4\pi a^2.$$

2. Encuentre el volumen del cono generado al rotar el triángulo formado por los segmentos de las rectas $y=\dfrac{x}{4}$ con $x\in[-4,0]$, $x=-4$ y el eje X:

a) en torno al eje X.

b) en torno a la recta $x=-4$.

Solución:

a) En torno al eje X:

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_a^b (f(x))^2dx=\pi\int_{-4}^{0}\frac{x^2}{16}dx \\ &= \frac{\pi}{16}\int_{-4}^{0}x^2dx=\frac{\pi}{16}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-4}^{0}=\frac{\pi}{16}\frac{64}{3}=\frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

b) En torno a la recta $x=-4$:

Observemos que el volumen que se forma al rotar la curva $x=4y,\ y\in[-1,0]$ entorno a $x=-4$ es el mismo que se forma al rotar la función en torno a $x=0$.

$$=\pi\int_a^b (f(y))^2dy=\pi\int_{-1}^{0}16y^2dy=16\pi\cdot\left.\frac{y^3}{3}\right|_{-1}^{0}=16\pi\frac{1}{3}=\frac{16}{3}\pi.$$

3. Demuestre, usando integrales, que el volumen del cono truncado de radios r y R y altura h es $\frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.
Solución:

En primer lugar debemos determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0, r)$ y (h, R).

$$y - r = \frac{R-r}{h}(x - 0) \iff y = \frac{R-r}{h}x + r.$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^v (f(x))^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h}x + r\right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^h \left(\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 x^2 + 2r\frac{R-r}{h}x + r^2\right) dx = \\ &= \pi \left[\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 \frac{x^3}{3} + \frac{R-r}{h}x^2 + r^2\right]_0^h = \\ &= \pi \left[\frac{(R-r)^2}{h^2}\frac{h^3}{3} + r(R-r)h + r^2 h\right] = \\ = 6\ &\pi \left[\frac{h}{3}(R^2 - 2rR + r^2) + Rrh - r^2 h + r^2 h\right] = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2). \end{aligned}$$

4. Calcule el volumen del **paraboloide circular** generado al rotar el segmento de parábola $y = \sqrt{2x}$ con $x \in [0, 3]$ en torno al eje X.
Solución:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^3 (2x) dx \\ &= \pi \cdot 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = 9\pi. \end{aligned}$$

5. Calcule el volumen del **paraboloide circular** generado al rotar el segmento de parábola $y = 2x^2$ con $x \in [0, 3]$ en torno al eje Y.

Solución:

$$V = \pi \int_a^b (f(y))^2 dy$$
$$x^2 = \frac{y}{2} \iff x = \sqrt{\frac{y}{2}};\ y \in [0, 18]$$
$$V = \pi \int_0^{18} \left(\sqrt{\frac{y}{2}}\right)^2 dy = \pi \int_0^{18} \frac{y}{2} dy$$
$$= \pi \cdot \frac{1}{2} \frac{y^2}{2}\Big|_0^{18} = \pi \cdot \frac{(2 \cdot 9)^2}{2^2} = \pi \cdot 9^2 = 81\pi.$$

6. Demuestre que el volumen del **elipsoide circular** generado al rotar la semielipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en torno al eje X es $\frac{4}{3}ab^2\pi$.

   a) Use coordenadas rectangulares.

   b) Use las ecuaciones paramétricas de la elipse:

$$\begin{cases} x = a\ \cos t \\ y = b\ \operatorname{sen} t\ ;\ t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Solución:

a)

$$b^2y^2 = a^2b^2 - b^2c^2 \iff y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2,\ x \in [-a, a].$$

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_{-a}^{a} (b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2) dx$$
$$= \pi \left[b^2x - \frac{b^2}{a^2}\frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{a} = \pi \left[\left(b^2a - \frac{b^2}{a^2}\frac{a^3}{3} \right) - \left(b^2\ (-a) + \frac{b^2}{a^2}\frac{a^3}{3} \right) \right]$$
$$= \pi \left[ab^2 - \frac{ab^3}{3} + ab^2 - \frac{ab^3}{3} \right] = \pi \frac{4ab^2}{3} = \frac{4}{3}ab^2\pi.$$

b) $\frac{dx}{dt} = -a \operatorname{sen} t$ lo que implica $dx = -a \operatorname{sen} t dt$.
Para calcular los límites de la integral en la variable t, observemos que: para

$t = 0,\ x(0) = a, \qquad \text{para } t = \pi,\ x(\pi) = -a.$

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-a}^{a} (f(x))^2 \cdot dx \\
&= \pi \int_{\pi}^{0} b^2 \operatorname{sen}^2 t \cdot (-a \operatorname{sen} t) dt = -\pi a b^2 \int_{\pi}^{0} \operatorname{sen}^2 t (\operatorname{sen} t) dt \\
&= \pi a b^2 \int_{0}^{\pi} (1 - \cos^2 t) \operatorname{sen} t dt = -\pi a b^2 \cos t \Big|_0^{\pi} + \pi a b^2 \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{\pi} \\
&= 2\pi a b^2 - \frac{2}{3}\pi a b^2 = \frac{4}{3}\pi a b^2.
\end{aligned}$$

7. Calcule el volumen del **hiperboloide** generado al rotar el arco de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, con $0 \leq x \leq 4$, $y \geq 0$, en torno al eje X.

   a) Use coordenadas rectangulares.

   b) Use las ecuaciones paramétricas de la hipérbola: $x = \cosh t$, $y = \operatorname{senh} t$.

Solución:

a)

$$y^2 = x^2 - 1,\ \ y \geq 0 \implies y = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Por lo tanto, el volumen pedido es:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_1^4 (f(x))^2 dx = \pi \int_1^4 (x^2 - 1) dx \\
&= \pi \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Bigg|_1^4 = \pi \left[\left(\frac{64}{3} - 4 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right] = \pi \left[\frac{52}{3} + \frac{2}{3} \right] = 18\pi.
\end{aligned}$$

b) Para $t = 0$, $x(0) = 1$, para $t = \operatorname{arccosh} 4 \iff t = \ln(4 + \sqrt{15})$. Ver subsección 3.4.4.

Luego el volumen pedido es:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{\ln(4+\sqrt{15})} (\operatorname{senh} t)^2 (\operatorname{senh} t) dt \\
&= \pi \int_0^{\ln(4+\sqrt{15})} (-1 + (\cosh t)^2) \operatorname{senh} t dt \\
&= \pi \int_0^{\ln(4+\sqrt{15})} -(\operatorname{senh} t) dt + \pi \int_0^{\ln(4+\sqrt{15})} (\cosh t)^2 \operatorname{senh} t dt \\
&= \pi(-(\cosh t))\Big|_0^{\ln(4+\sqrt{15})} + \pi \frac{(\cosh t)^3}{3}\Big|_0^{\ln(4+\sqrt{15})} \\
&= -\pi[4-1] + \frac{\pi}{3}[4^3 - 1] = -3\pi + 21\pi = 18\pi.
\end{aligned}$$

8. Calcule el volumen y el área de la superficie generada al girar el arco de $f(x)$ en torno al eje X.

   a) $f(x) = \operatorname{sen} x \; , \; x \in [0, \pi/4]$.

   b) $f(x) = \cos x \; , \; x \in [0, \pi/4]$.

   c) $f(x) = \exp x \; , \; x \in [0, 1]$.

   d) $f(x) = \cosh x \; , \; x \in [0, 1]$.

   Solución:

   a)
   $$V = \pi \int_0^{\pi/4} (\operatorname{sen}^2 x) dx = \pi \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx.$$
   Haciendo el cambio de variable $u = 2x, \quad du = 2dx$ tenemos,
   $$\begin{aligned}
   V &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/4} dx - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/4} \cos(2x) dx = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \cos u \cdot \frac{du}{2} \\
   &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} \cos u du = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} u \int_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).
   \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned}
   V &= \int_0^{\pi/4} \cos^2 x dx = \pi \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi/4} dx + \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx \\
   &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right).
   \end{aligned}$$

c)

$$V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx.$$

Usando el cambio de variable: $v = 2x,\ dv = 2dx$, tenemos:

$$V = \pi \int_0^2 e^v \frac{dv}{2} = \frac{\pi}{2} \int_0^2 e^v dv = \frac{\pi}{2}[e^2 - 1].$$

d)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (\cosh x)^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 \frac{1 + \cosh 2x}{2} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 dx + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \cosh\, 2x dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \int_0^2 \cosh v \frac{dv}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \operatorname{senh}\, v \Big|_0^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \operatorname{senh}\, 2. \end{aligned}$$

9. Calcule el volumen generado por rotación de la región en el primer cuadrante acotada por las curvas : x^2 y $\sqrt{x}$.
Solución:

Sea V_1 el volumen generado por $y = \sqrt{x}$ y sea V_2 el volumen generado por $y = x^2$. entonces el volumen pedido es $V_1 - V_2$.

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{\pi}{2} \\ V_2 &= \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} = \frac{\pi}{5}. \\ V &= V_1 - V_2 = \frac{3\pi}{10}. \end{aligned}$$

5.4. Integrales elípticas e integración numérica

En esta sección sólo se pretende dar una idea muy general sobre las integrales elípticas y un esbozo de los métodos más elementales de integración numerica. El objetivo es que el estudiante sepa de dónde surgen y como deben ser tratadas estas integrales que aparecen de una aplicación muy básica de la integrales.

5.4.1. Integrales elípticas

En el capítulo 4 se muestran algunos métodos para calcular primitivas. Pero, existen funciones que siendo integrables no tienen una primitiva calculable explícitamente en términos de funciones elementales. Por ejemplo, las funciones $\dfrac{e^x}{x}$, e^{-x^2} entre otras son continuas, por lo tanto, integrables, pero sus integrales no pueden ser calculadas encontrando sus primitivas. Una familia de funciones que tienen esta particularidad son las que constituyen las **integrales elípticas**.

El nombre de **integral elíptica** surge del hecho de ellas aparecen cuando se quiere calcular la longitud de arco de una elipse. Veamos como.
Dada una elipse escrita en su forma canónica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Calculemos la longitud de su perímetro usando la ecuación dada en el capítulo 5, sección 5.2. Al despejar y tenemos que:

$$y^2 = b^2\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right) \Leftrightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Derivando con respecto a x nos queda:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{b}{a}\frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}(-2x) = \pm\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Luego, la longitud de la curva está determinada por:

$$\begin{aligned} l &= 4\int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\,dx = 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\,dx \\ &= 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2}{(a^2 - x^2)}}\,dx \end{aligned}$$

Si hacemos $\kappa = \frac{\sqrt{|a^2-b^2|}}{a}$, entonces l queda determinada por:

$$l = 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^2-\kappa^2x^2}{(a^2-x^2)}}\,dx$$

Ahora en $\displaystyle\int_0^a \sqrt{\frac{a^2-\kappa^2x^2}{(a^2-x^2)}}\,dx$ hacemos la sustitución trigonométrica:

$$\begin{cases} x &= a \text{ sen } \theta \\ dx &= a \cos \theta \, d\theta. \end{cases}$$

Luego,

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta = a^2\cos^2\theta$$

Notar que cuando $x = 0$ entonces $\theta = 0$ y cuando $x = a$ tenemos que $\operatorname{sen}\theta = 1$, por lo tanto, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Así,

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{\frac{a^2-\kappa^2x^2}{(a^2-x^2)}}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2-\kappa^2a^2\operatorname{sen}^2\theta}}{a\cos\theta}\cdot a\cos\theta\,d\theta \\ &= \sqrt{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\kappa^2\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta \\ &= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\kappa^2\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta. \end{aligned}$$

Definición 5.4.1 Llamaremos:

1. **Integral elíptica de primera clase** a una integral que se escribe como
$$\int_0^L \frac{dt}{\sqrt{1-\kappa^2\operatorname{sen}^2 t}} = F(\kappa, L).$$
2. **Integral elíptica de segunda clase** a una integral que tiene la forma
$$\int_0^L \sqrt{1-\kappa^2\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = E(k, L).$$
3. **Integral elíptica de tercera clase** una integral que se escribe como
$$\int_0^L \frac{d\theta}{(1+n\operatorname{sen}^2\theta)\sqrt{1-\kappa^2\operatorname{sen}^2\theta}}$$

Para poder resolver estas integrales se necesitan a métodos numéricos.

Ejemplo 5.4.2 1. Exprese la longitud de una elipse cuyos semiejes son 2 y 3 usando sus ecuaciones paramétricas y clasífiquela c de que tipo de integral elíptica es. Obtenga alguna cota superior e inferior para la longitud de la elipse dada.

Solución: Las ecuaciones paramétricas de la elipse dada son:

$$\begin{cases} x(t) & = 2\cos t \\ y(t) & = 3\operatorname{sen} t \ , \ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{cases} x'(t) & = -2\operatorname{sen} t \\ y'(t) & = 3\cos t \\ (x')^2 + (y')^2 & = 4\operatorname{sen}^2 t + 9\cos^2 t = 4\operatorname{sen}^2 t + 9 - 9\operatorname{sen}^2 t = 9 - 5\operatorname{sen}^2 t. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{9 - 5\operatorname{sen}^2 t} dt = 3\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{5}{9}\operatorname{sen}^2 t} dt = E(\frac{\sqrt{5}}{3}, 2\pi).$$

Es una integral elíptica de segunda clase. Como $9 - 5\operatorname{sen}^2 t \geq 9 - 5 = 4$ entonces, $l = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{9 - 5\operatorname{sen}^2 t} dt \geq \int_0^{2\pi} \sqrt{4} dt = 4\pi$.Por otro lado, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{9 - 5\operatorname{sen}^2 t} dt \leq \int_0^{2\pi} \sqrt{9} dt = 6\pi$. Así, obtenemos que

$$4\pi \leq \text{ longitud de la elipse} \leq 6\pi.$$

2. Exprese la longitud de la sinusoide $y = A\operatorname{sen}(\omega x)$ en el intervalo $[0, T]$, donde T es el período, usando la notación para integrales elípticas.

Solución:

$$\begin{aligned} y' &= A\omega\cos(\omega x) \\ 1 + (y')^2 &= 1 + A^2\omega^2\cos^2(\omega x) = 1 + A^2\omega^2 - A^2 w^2 \operatorname{sen}(\omega x) = \\ &= (1 + A^2\omega^2)\left[1 - \frac{A^2\omega^2}{1 + A^2\omega^2}\operatorname{sen}^2(\omega x)\right]. \end{aligned}$$

La longitud pedida es:

$$l = \int_0^T \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + A^2\omega^2}\int_0^T \sqrt{1 - \frac{A^2\omega^2}{1 + A^2\omega^2}\operatorname{sen}^2(\omega x)} dx.$$

Llamando $\kappa^2 = \dfrac{A^2\omega^2}{1+A^2\omega^2}$, la integral que expresa la longitud de la sinusoide puede escribirse como:

$$l = \sqrt{1+A^2\omega^2}\int_0^T \sqrt{1-\kappa^2 \operatorname{sen}^2(\omega x)}dx.$$

Así vemos que la longitud de una sinusoide está dada por una integral eliptíca de segunda clase.

5.4.2. Dos métodos numéricos de integración

Muchas integrales , entre ellas las elipticas, sólo pueden ser aproximadas mediante métodos numéricos. A continuación mostraremos dos de ellos: la **Regla del trapecio** y la **Regla de Simpson**. La particularidad que tienen estos métodos es que permiten aproximar el valor de una integral definida sin conocer necesariamente todos los valores de $f(x)$.

Regla del trapecio

Este método permite aproximar una integral mediante una suma de Riemann muy particular, que consiste en particionar el intervalo de integración en una número finito de subintervalos que serán las bases de los trapecios de alturas $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$, como fue hecho en el problema resuelto $4b$ visto en la sección 3.1. Mostraremos un ejemplo que hemos sacado del trabajo de titulación de J.C.Guajardo y J.Urrea.

Ejemplo 5.4.3 En el Rally más importante de Chile, en donde compiten parejas de todo el mundo, los representantes locales, el piloto John Urrea y el copiloto Juan Carlos Guajardo han ganado la primera etapa con un tiempo de 1 hora y 15 minutos.

La siguiente tabla muestra las distintas velocidades que alcanzaron estos competidores:

Tiempo[s]	Velocidad[m/s]
0	26,39
900	30,55
1800	12,50
2700	22,22
3600	45,83

¿Cuál fue la distancia aproximada que cubrieron en la primera etapa todos los participantes del Rally?

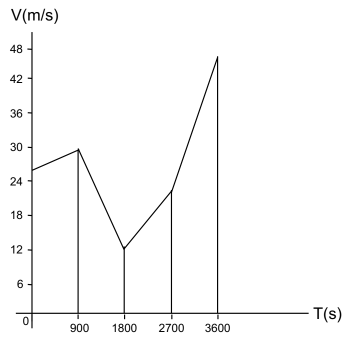


Figura 5.13: Gráfico de Datos

Solución: En primer lugar, ubicaremos en un gráfico (ver Figura 5.13) los seis puntos correspondientes a los datos entregados. Luego, surgen dos importantes interrogantes; ¿cómo unir de manera razonable estos seis puntos? y ¿cómo calcular el área de la región resultante? Respecto a la primera pregunta, la forma más elemental de unir estos puntos es por medio de segmentos de recta. De esta manera, se puede observar que en la región limitada por la gráfica y el eje X en el intervalo [0,4500] se tienen cinco trapecios. Así, teniendo en cuenta la segunda pregunta, el área de la región resultante será la suma de las áreas de cada trapecio. Recordemos que el área de un trapecio de base b y de lados paralelos h_1 y h_2 está dada por:

$$\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right) b$$

Por lo tanto, el área total que queremos calcular, es decir, la distancia aproximada que cubrieron en la primera etapa los participantes del Rally es:

$$\begin{aligned}
A_T &= \frac{f(0)+f(900)}{2}900 + \frac{f(900)+f(1800)}{2}900 + \frac{f(1800)+f(2700)}{2}900 \\
&\quad + \frac{f(2700)+f(3600)}{2}900 \\
&= [f(0)+2f(900)+2f(1800)+2f(2700)+f(3600)]450 \\
&= (26,39+2\cdot 30,55+2\cdot 12,50+2\cdot 22,22+45,83)450 \\
&= 202,76\cdot 450 \\
&= 91242
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia recorrida por los competidores en la primera etapa del Rally fue de 91242 metros.

Regla de Simpson

Este método emplea segmentos parabólicos en lugar de segmentos de recta. Igual que antes, particionamos nuestro intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud, o sea, $\triangle x = (b-a)/n$; y donde esta vez n es un número par. Entonces, conectamos cada conjunto de tres puntos consecutivos aproximando la curva $y = f(x) \geq 0$ por medio de un polinomio cuadrático, y como ya sabemos, los polinomios son fáciles de integrar. Si $y_i = f(x_i)$, entonces $P_i(x_i, y_i)$ es el punto de la curva que está sobre x_i.

Con motivo de simplificar nuestros cálculos, analizaremos el caso en que $x_0 = -\triangle x$, $x_1 = 0$ y $x_2 = \triangle x$, ver Figura 5.14.

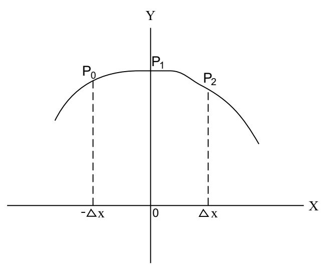


Figura 5.14: Regla de Simpson

La ecuación de la parábola que pasa por los puntos P_0, P_1 y P_2 es de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$; entonces el área bajo la parábola que va desde $x_0 = -\triangle x$ hasta $x_2 = \triangle x$ es:

$$\begin{aligned}
\int_{-\triangle x}^{\triangle x}(Ax^2+Bx+C)dx &= A\frac{x^3}{3}\Big|_{-\triangle x}^{\triangle x}+B\frac{x^2}{2}\Big|_{-\triangle x}^{\triangle x}+Cx\Big|_{-\triangle x}^{\triangle x}\\
&= A\frac{(\triangle x)^3}{3}-A\frac{(-\triangle x)^3}{3}+B\frac{(\triangle x)^2}{2}-B\frac{(-\triangle x)^2}{2}\\
&\quad +C(\triangle x)-C(-\triangle x)\\
&= A\frac{(\triangle x)^3}{3}+A\frac{(\triangle x)^3}{3}+B\frac{(\triangle x)^2}{2}-B\frac{(\triangle x)^2}{2}\\
&\quad +C(\triangle x)+C(\triangle x)\\
&= 2A\frac{(\triangle x)^3}{3}+2C(\triangle x)\\
&= \frac{\triangle x}{3}(A(\triangle x)^2+6C)
\end{aligned}$$

Ahora, como la parábola pasa por $P_0(-\triangle x, y_0)$, $P_1(0, y_1)$ y $P_2(\triangle x, y_2)$, tenemos:

$$\begin{aligned}
y_0 &= A(-\triangle x)^2+B(-\triangle x)+C = A(\triangle x)^2-B(\triangle x)+C\\
y_1 &= C\\
y_2 &= A(\triangle x)^2+B(\triangle x)+C
\end{aligned}$$

Luego:

$$y_0+4y_1+y_2 = 2A(\triangle x)^2+6C$$

De esta forma, podemos expresar el área bajo la parábola de la siguiente manera:

$$\frac{\triangle x}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

Como podemos observar, el área bajo la parábola que pasa por los puntos P_0, P_1 y P_2, desde $x = x_0$ hasta $x = x_2$ no cambia si ésta la desplazamos en sentido horizontal. De esta forma, el área bajo la parábola que pasa por los puntos P_2, P_3 y P_4, desde $x = x_2$ hasta $x = x_4$ está dada por:

$$\frac{\triangle x}{3}(y_2+4y_3+y_4)$$

De este modo, si calculamos las áreas bajo todas las parábolas y sumamos los resultados, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{\triangle x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{\triangle x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots \\
&\quad + \frac{\triangle x}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\
&= \frac{\triangle x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)
\end{aligned}
$$

Esta es una aproximación confiable para cualquier función continua.

Ejemplo 5.4.4 Resolveremos el mismo problema del ejemplo anterior 5.4.3 usando la regla de Simpson. Utilizando $n = 4$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{3600} f(x)dx &\approx \frac{3600-0}{3\cdot 4}\left[f(0) + 4f(900) + 2f(1800) + 4f(2700) + f(3600)\right] \\
&= \frac{3600}{12}(26,39 + 4\cdot 30,55 + 2\cdot 15,50 + 4\cdot 22,22 + 45,36) \\
&= 300(26,39 + 122,2 + 31 + 88,88 + 45,36) \\
&= 300 \cdot 513,83 \\
&= 154149
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la distancia recorrida por los competidores en la primera etapa del Rally fue de 154149 metros.

Observación 5.4.5 Por lo general, la regla de Simpson es más precisa que la regla del Trapecio. Esto se debe a que la primera calcula el área debajo de parábolas aproximantes y la última calcula el área debajo de rectas aproximantes. Es más, la regla de Simpson proporciona valores exactos de integrales para cualquier polinomio de grado 3 o menor.

A continuación enunciaremos un teorema que permite aproximar integrales controlando el error que se comete.

Teorema 5.4.6 Si f tiene derivadas continuas hasta el cuarto orden , entonces existe $\mu \in (a, b)$ tal que la regla de Simpson con $n = 2m$ subintervalos de $[a, b]$ aproxima la integral I madiante la relación:

$$
I = \int_a^b f(x)\,dx \approx I_S = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1}) + f(b)\right],
$$

donde , $a = x_0 < x_1 < ... < x_{2m} = b$, $h = \dfrac{(b-a)}{2m}$ y $x_j = x_0 + h$ para cada $j = 0, 1, ..., 2m$. Con un error igual a

$$I - \int_a^b f = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{iv}(\mu).$$

Observación 5.4.7 El teorema 5.4.6 permite acotar el error:

$$|I_S - \int_a^b f| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} K,$$

donde K es una cota de $|f^{IV}(x)|$ para $x \in [a, b]$.
La demostración de este teorema puede verse en [**?**]

Ejercicios resueltos

1. Utilizando la fórmula de Simpson, calcular la integral elíptica 5.3 del problema 6 del capítulo 5 con un error menor o igual que $\varepsilon = 0,21$.

   Solución: En este caso tenemos ,

$$L = \int_0^{4\pi} \sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{4\pi} \sqrt{1 + 3\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta}_{I}, \quad \text{con } a = 0, b = 4\pi.$$

   Calcularemos el valor aproximado de I para luego al multiplicar este valor por $\frac{1}{2}$ y así obtener el valor aproximado de la integral L pedida.
   Tenemos entonces que en el intervalo de integración, $[0, 4\pi]$, de I el integrando $f(\theta) = \sqrt{1 + 3\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}$ admite derivada cuarta continua (esta derivada es muy extensa por lo que se recomienda calcularla con un software matemático). Veamos el gráfico, de $|f^{IV}(\theta)|$ en la Figura 5.15.

   Según el gráfico se puede ver claramente que f^{IV} está acotada en $[0, 4\pi]$ y que una de sus cotas es $K = 2{,}5$, por lo tanto el número n de partes en el que hay que dividir el intervalo $[0, 4\pi]$, para así garantizar un error menor o igual que $\varepsilon = 0,21$ es tal que:

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} K \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{(4\pi)^5}{180n^4} 2{,}5 \leq 0{,}21$$

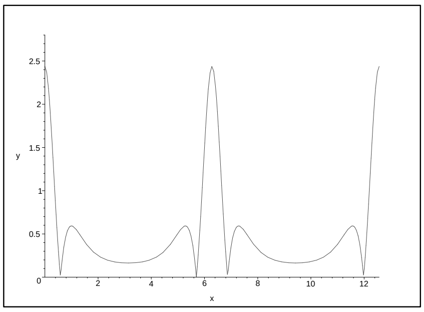


Figura 5.15: Gráfico de $|f^{IV}(\theta)|$

O sea,

$$n^4 \geq \frac{(4\pi)^5}{180 \cdot 0{,}21}\, 2{,}5$$

Es decir, debemos tomar $n \geq 11{,}99\ldots$, luego escogemos $n = 12$.

Luego,

$$h = \frac{4\pi - 0}{12} = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

Ahora encontremos el valor de:

$$\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) = \sum_{j=1}^{5} f(x_{2j})$$

Calculemos los x_{2j} para $j \in \{1, ..., 5\}$

$$x_2 = x_0 + 2h = 0 + 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi; \quad x_4 = 4h = 4 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$
$$x_6 = 6h = 6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi; \quad x_8 = 8h = 8 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{8}{3}\pi$$
$$x_{10} = 10h = 10 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{10}{3}\pi$$

Entonces;

$$\begin{aligned}
f(x_2) &= f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sqrt{1+3\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{3}} = \sqrt{1+3\cdot\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \\
f(x_4) &= f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \sqrt{1+3\operatorname{sen}^2\frac{2}{3}\pi} = \sqrt{1+3\cdot\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \\
f(x_6) &= f(2\pi) = 1 \\
f(x_8) &= f\left(\frac{8}{3}\pi\right) = \sqrt{1+3\operatorname{sen}^2\frac{4}{3}\pi} = \sqrt{1+3\cdot\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \\
f(x_{10}) &= f\left(\frac{10}{3}\pi\right) = \sqrt{1+3\operatorname{sen}^2\frac{5}{3}\pi} = \sqrt{1+3\cdot\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{5} f(x_{2j}) &= f\left(\frac{2}{3}\pi\right) + f\left(\frac{4}{3}\pi\right) + f(2\pi) + f\left(\frac{8}{3}\pi\right) + f\left(\frac{10}{3}\pi\right) \\
&= \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \\
&= 1 + 2\sqrt{13}
\end{aligned}$$

Ahora, para encontrar el valor de $\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1}) = \sum_{j=1}^{6} f(x_{2j-1})$ buscamos el valor de x_{2j-1} para todo $j \in \{1, ..., 6\}$.

$$\begin{aligned}
&x_1 = x_0 + h = 0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}; \quad x_3 = 3h = 3\cdot\frac{\pi}{3} = \pi \\
&x_5 = 5h = 5\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi; \quad x_7 = 7h = 7\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{7}{3}\pi \\
&x_9 = 9h = 9\cdot\frac{\pi}{3} = 3\pi; \quad x_{11} = 11h = 11\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{11}{3}\pi
\end{aligned}$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
f(x_1) &= f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{1+3\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\pi}{6}} = \sqrt{1+3\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}\\
f(x_3) &= f(\pi) = \sqrt{1+3\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\pi}{2}} = \sqrt{1+3\cdot 1} = 2\\
f(x_5) &= f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \sqrt{1+3\,\mathrm{sen}^2\,\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{1+3\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}\\
f(x_7) &= f\left(\frac{7}{3}\pi\right) = \sqrt{1+3\,\mathrm{sen}^2\,\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{1+3\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}\\
f(x_9) &= f(3\pi) = \sqrt{1+3\,\mathrm{sen}^2\,\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{1+3\cdot 1} = 2\\
f(x_{11}) &= f\left(\frac{11}{3}\pi\right) = \sqrt{1+3\,\mathrm{sen}^2\,\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{1+3\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{6} f(x_{2j-1}) &= f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f(\pi) + f\left(\frac{5}{3}\pi\right) + f\left(\frac{7}{3}\pi\right) + f(3\pi) + f\left(\frac{11}{3}\pi\right)\\
&= \frac{\sqrt{7}}{2} + 2 + \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} + 2 + \frac{\sqrt{7}}{2}\\
&= 4 + 2\sqrt{7}
\end{aligned}
$$

Además, $f(a) = f(0) = 1$ y $f(b) = f(4\pi) = 1$

Reemplazando en la fórmula tenemos:

$$
I = \frac{\pi}{9}\left[1 + 2(1+2\sqrt{13}) + 4(4+2\sqrt{7}) + 1\right] \approx 19{,}4039
$$

Luego, $\frac{1}{2}\cdot I = 9{,}7019\ldots$ que es una buena aproximación para la integral L pedida.

Ejercicios propuestos

1. Exprese la longitud de la curva llamada **trocoide** dada por:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= at - b\,\mathrm{sen}\,t\\
y(t) &= a - b\cos t \ \ ,\ t \in [0, L],
\end{aligned}
$$

en términos de una integral elíptica de segunda clase.

2. La longitud de arco de una hipérbola puede expresarse en términos de integrales elípticas de primera y segunda clase. Ver A.Blank: Problemas de Cálculo y Análisis Matemático. Limusa-Wiley, 1971., pág. 201.

Capítulo 6

Integrales impropias y series

6.1. Integrales impropias

La definición de integral de Riemann necesita dos hípoteis mínimas que son que la función sea acotada y que esté definida en un intervalo cerrado y acotado. Cuando al menos una de estas condiciones no se cumple debemos usar otros recursos para darle sentido a las integrales. Entonces, hablaremos de **integrales impropias** cuando la función no es acotada en el intervalo de integración o cuando el intervalo de integración no es acotado , es decir tiene una de las formas siguientes : $]-\infty, a[$; $]a, \infty[$; $]-\infty, \infty[$.

6.1.1. Integrales impropias sobre intervalos no acotados o de primera clase

Definición 6.1.1 1. Si la función $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ satisface la siguiente propiedad :
para todo $c \in [a, \infty[$, f es integrable en $[a, c]$; entonces definimos:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)dx,$$

cuando éste límite existe.

2. Si la función $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$ satisface la siguiente propiedad :
para todo $c \in]-\infty, a]$, f es integrable en $[c, a]$; entonces definimos :

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{c \to -\infty} \int_c^a f(x)dx,$$

cuando éste límite existe.

3. Si la función $f :]-\infty, \infty[\to \mathbb{R}$ satisface la siguiente propiedad: existe $a \in \mathbb{R}$ tal que las dos integrales impropias $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ y $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ existen, entonces definimos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

Esta integral también puede denotarse como $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$.

Observación 6.1.2 Es importante notar que la definición de integral impropia sobre todo $\mathbb{R}$ no depende del punto a elegido. Para ver esto elijamos otro punto b y supongamos -para fijar las ideas - que $b \leq a$. Entonces,

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{a} f(x)dx$$

Así, $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ existe, y por lo tanto, la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ también existe.

Observación 6.1.3 Si existe el límite $\displaystyle\lim_{c\to+\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, diremos que la integral $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ es convergente. De manera análoga, si existe $\displaystyle\lim_{c\to+\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, diremos que la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ es convergente.
Cuando los límites que definen las integrales impropias de la definición 6.1.1, no existen diremos que las integrales divergen.

Ejemplo 6.1.4 Sea $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Analicemos la existencia de la integral de f sobre su dominio.

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} x^{-2}dx = \lim_{c\to\infty} \int_{1}^{c} \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_{1}^{c} = \lim_{c\to+\infty} \left(-\frac{1}{c} + 1\right) = 1.$$

Ejemplo 6.1.5 Analicemos la convergencia de la integral $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx$.

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx &= \lim_{c\to+\infty} \int_{0}^{c} e^{-x}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \left(-e^{-x}\Big|_{0}^{c}\right) \\ &= \lim_{c\to+\infty} [1 - e^{-c}] = 1.\end{aligned}$$

Ejemplo de referencia El siguiente ejemplo generaliza el ejemplo 6.1.4 y constituye una de las bases para usar los criterios de convergencia.

Ejemplo 6.1.6 Si $a > 0$ y $p \in \mathbb{R}$, entonces la integral impropia de primera clase

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ +\infty & \text{si } p \leq 1. \end{cases}$$

En efecto,

- Si $p = 1$.
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{c \to +\infty} (\ln c - \ln a) = +\infty.$$
- Si $p \neq 1$.
$$\int_a^{c} \frac{1}{x^p}\, dx = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_a^c = \frac{c^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}.$$
Entonces,
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \left[\frac{c^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p} \right] = \frac{a^{1-p}}{p-1} + \frac{1}{1-p} \lim_{c \to +\infty} c^{1-p}. \tag{6.1}$$
El último límite de la ecuación 6.1 tiene distinto valor según p sea mayor o menor que 1.
    - Si $p > 1$: en este caso $1 - p < 0$, así
    $$\lim_{c \to +\infty} c^{1-p} = \lim_{c \to +\infty} \frac{1}{c^{p-1}} = 0.$$
    - Si $p < 1$: entonces, $1 - p > 0$, así
    $$\lim_{c \to +\infty} c^{1-p} = +\infty.$$

Ejemplo 6.1.7 Casos particulares del ejemplo 6.1.6 son:

- $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{2^{1-3}}{3-1} = \frac{1}{8}.$
- $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{(1/2)^{1-3}}{3-1} = 2.$
- $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx = +\infty.$

6.1.2. Propiedades de las integrales impropias de primera clase

Las propiedades básicas de la integral Riemann se extienden, mediante procesos de pasar al límite, a las integrales impropias. Por ejemplo:

1. **Linealidad:** Si f y g son integrables en $[a, c[$ para todo $c \in \mathbb{R}$, $c \geq a$ y si sus respectivas integrales impropias sobre $[a, +\infty[$ son convergentes, entonces también existe- es decir- es convergente la integral impropia de $\lambda f + \mu g$ sobre $[a, +\infty]$ cualesquieran sean los números reales λ y μ y se cumple la igualdad:

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(x)\, dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\, dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x)\, dx.$$

2. **Regla de Barrow** Si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, +\infty[$ y si $F : [a, +\infty] \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f en $[a, c]$ para todo $c \in \mathbb{R}$, $c \geq a$ y si la integral de f sobre $[a, +\infty[$ existe, se cumple que:

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{c \to +\infty} (F(t) - F(a)) \\ &= F(x)\Big|_a^{+\infty} \end{aligned}$$

3. **Cambio de Variable:**

   Si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, +\infty[$ y si $\varphi : [\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ es una función con derivada continua en $[\alpha, \beta[$; Donde $-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$; y si además $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(t) \to b^-$, cuando $t \to \beta^-$ y si $\varphi([\alpha, \beta[) = [a, +\infty[$, entonces:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^{\beta^-} f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

   Si una de las integrales es convergente (divergente), la otra también lo es.

4. **Integración por Partes:** Si f, g son dos funciones con derivadas continuas en $[a, +\infty[$ y son convergentes dos de los tres terminos siguientes, entonces:

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$$

Observación 6.1.8 Todas las propiedades anteriores son válidas para integrales sobre intervalos del tipo $] - \infty, a]$

Criterios de convergencia para integrales de primera clase

Los criterios de convergencia están enunciados para integrales impropias sobre intervalos de la forma $[a,+\infty[$, pero todos ellos valen de la misma forma para intervalos del tipo $]-\infty,a]$.

Criterio de Comparación: Sean $f(x), g(x)$ funciones continuas, positivas y tales que $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \geq a$. Entonces se tiene que:

- Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge.
- Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

Demostración: Observemos que si $f:\ [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ es creciente y acotada superiormente, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe. Definamos las funciones F y G mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x f(t)dt \\ G(x) &= \int_a^x g(t)dt. \end{aligned}$$

Ambas funciones son crecientes, si $x_1 < x_2$ entonces $F(x_1) = \displaystyle\int_a^{x_1} f(t)\,dt < F(x_2) = \displaystyle\int_a^{x_2} f(t)dt = \int_a^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt = F(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt.$

Como $f(x) \geq 0$ la integral $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$ es positiva y, por lo tanto, $F(x_1) \geq F(x_2)$.

Del mismo modo se prueba que G es creciente.

Recordemos ahora, que por definición:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(u)du = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x g(u)du = \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Entonces, por hipótesis, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ existe y como además $F(x) \geq G(x)$, la función G es creciente y acotada superiormente. Por lo cual, $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$ existe. Esto es equivalente a tener la convergencia de la integral impropia de g. $\blacksquare$

Ejemplo 6.1.9 En los ejemplos que veremos a continuación usaremos como integral de referencia la vista en el ejemplo 6.1.4, que es una integral convergente.

a) La integral: $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ es converge. En efecto,

$$x^2 \geq 0, \text{ Por tanto, } 0 \leq x^2 \leq 1+x^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

b) La integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\, dx$$

es convergente. Usando el criterio de comparación, tenemos:

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1 \Rightarrow \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

Como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ es convergente, la integral dada inicialmente también converge.

Criterio de comparación al límite Sean $f(x), g(x)$ funciones continuas , positivas. Entonces, para $x \geq a$ tenemos que :

- Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K; K \neq 0$, entonces ambas integrales impropias sobre $[a, +\infty[$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \quad , \quad \int_a^{+\infty} g(x)\, dx$$

convergen o ambas divergen.

- Si $K = 0$, entonces la convergencia de $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\ dx$ implica la convergencia de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

Ejemplo 6.1.10 Si : $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} x^n dx$$

converge. Pues, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge y

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}x^n}{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-x}x^n \cdot x^2\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{-x}x^{n+2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n+2}}{e^x}.
\end{aligned}$$

Este ultimo límite, si es evaluado en forma directa, da lugar a una forma indeterminada del tipo $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, por lo cual aplicamos L'Hôpital, y obtenemos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n+2}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(n+2)x^{n+1}}{e^x}.$$

Que vuelve a dar lugar a una forma indeterminada del tipo $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, por tanto, si aplicamos sucesivamente L'Hôpital, obtenemos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n+2}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(n+2)(n+1)\cdot ... \cdot 2\cdot 1}{e^x} = 0$$

Así, la convergencia de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ implica la convergencia de $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}x^n dx$.

Ejemplo 6.1.11 Si $p, q > 0$ la convergencia de la integral

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q}dx,$$

se puede estudiar usando comparación al límite con la función $\dfrac{1}{x^{q-p}}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^p}{1+x^q} : \frac{1}{x^{q-p}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^q}{1+x^q} = 1.$$

Entonces, como $k = 1$, ambas integrales convergen o ambas divergen. Luego, como sabemos que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{q-p}}$ converge si $q-p > 1$ y diverge si $q-p \leq 1$, tenemos que:

- I converge cuando $q-p > 1$.
- I diverge cuando $q-p \leq 1$.

Ejemplo 6.1.12 Ahora haremos una aplicación del ejemplo anterior.

a) La integral $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ diverge como consecuencia del ejemplo anterior, ya que: $p = \dfrac{1}{2}$ y $q = \dfrac{1}{3}$ implican que $q - p = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} < 1$.

b) En cambio la integral $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$ converge. En este caso $p = \dfrac{1}{2}$ y $q = 2$ implican que $q - p = \dfrac{3}{2} > 1$.

6.1.3. Integrales impropias cuando la función no es acotada en el intervalo de integración o de segunda clase

Definición 6.1.13 1. Si $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ una función tal que, para todo $c \in]a,b[$,f es integrable en $[a,c]$, entonces se define

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx,$$

cuando este límite existe.

2. Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ una función tal que, para todo $c \in [a,b[$,f es integrable en $[c,b[$, entonces se define

$$\int_{a}^{b^-} f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx,$$

cuando este límite existe.

Ejemplo 6.1.14 La función $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, no está definida para $x = 0$. Calculamos la integral impropia:

$$\int_{0^+}^{1} \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \lim_{c \to 0^+} \sqrt{x}\Big|_c^1$$

$$= \lim_{c \to 0^+} (\sqrt{1} - \sqrt{c}) = 1$$

Definición 6.1.15 Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ es una función tal que, para todo $c_1 < c_2 \in]a,b[$, f es integrable en $[c_1, c_2[$ entonces se define

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c_1 \to a} \int_{c_1}^{x_0} f(x)dx + \lim_{c_2 \to b} \int_{x_0}^{c_2} f(x)dx,$$

para cualquier $x_0 \in]a,b[$, si los límites existen.

Ejemplo 6.1.16 1. Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

Esta función no es acotada en el intervalo $[-1,1]$, debido a que entorno a cero tiende a $\mp\infty$.Usaremos la definición 6.1.15.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)dx &= \lim_{c\to 0^-} \int_{-1}^{c} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx + \lim_{c\to 0^+} \int_{c}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx \\ &= \lim_{c\to 0^-} \frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_{-1}^{c} + \lim_{c\to 0^+} \frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_{c}^{1} \\ &= \lim_{c\to 0^-} \frac{3}{2}\left(c^{2/3} - (-1)^{2/3}\right) + \lim_{c\to 0^+} \frac{3}{2}\left(1^{2/3} - c^{2/3}\right) \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0. \end{aligned}$$

2. Sea f definida por: $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Como en el caso anterior esta función no es acotada en torno del cero. Veamos si existe la integral impropia $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)dx &= \lim_{c\to 0^-} \int_{-1}^{c} \frac{1}{x^2}dx + \lim_{c\to 0^+} \int_{c}^{1} \frac{1}{x^2}dx \\ &= \lim_{c\to 0^-} -x^{-1}\Big|_{-1}^{c} + \lim_{c\to 0^+} -x^{-1}\Big|_{c}^{1} \\ &= \lim_{c\to 0^-} \left(-\frac{1}{c} + 1\right) + \lim_{c\to 0^+} \left(-\frac{1}{c} - 1\right) \\ &= -\infty + 1 - \infty - 1 \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Por lo tanto, esta integral no existe.

Observación 6.1.17 También se pueden aplicar estas definiciones cuando hay varios puntos conflictivos $a < c_1 < c_2 < \cdots < c_n < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)dx + \int_{c_n}^{b} f(x)dx,$$

donde cada integral de la derecha se ha obtenido como un límite.

Integral de referencia

Ejemplo 6.1.18 El ejemplo que veremos ahora constituye una integral de referencia para aplicar distintos criterios de convergencia.
Si $b > 0$ y $p \in \mathbb{R}$, la integral impropia de segunda clase:

$$\int_{0^+}^b x^{-p}\, dx \;= \begin{cases} \frac{b^{1-p}}{1-p} \text{ si } & p < 1 \\ +\infty \text{ si } & p \geq 1. \end{cases}$$

En efecto, si $\varepsilon > 0$ tenemos

$$\int_\varepsilon^b x^{-p} dx = \frac{b^{1-p} - \varepsilon^{1-p}}{1-p};\ p \neq 1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} I = \int_0^b x^{-p} dx &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^b x^{-p} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p} \right) \\ &= \frac{b^{1-p}}{1-p} - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(\varepsilon^{1-p})}{1-p}. \end{aligned}$$

Cuando $\varepsilon \to 0^+$ tenemos:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{1-p} = \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{1}{\varepsilon^{p-1}} \ ; 1 - p < 0 \\ \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{1-p} \ ; 1 - p > 0 \end{cases}$$

Por tanto,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{1-p} = \begin{cases} +\infty & \text{si } 1 - p < 0 \\ 0 & \text{si } 1 - p > 0 \end{cases}$$

Si $p = 1$, entonces

$$\int_0^b \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln x\Big|_{\varepsilon}^{b} = +\infty.$$

En particular, tenemos que

- $\displaystyle\int_{0^+}^{1/2} \frac{1}{x^{1/2}}dx = \frac{2}{\sqrt{2}}.$
- $\displaystyle\int_{0^+}^{2} \frac{1}{x^{1/2}}dx = 2\sqrt{2}.$
- $\displaystyle\int_{0^+}^{1/3} \frac{1}{x^{3/2}}dx$ es divergente , pues el exponente de x es mayor que 1.

Propiedades de las integrales impropias de segunda clase

Las propiedades de la integral de Riemann se extienden, mediante procesos de paso al límite, a las integrales impropias. Por ejemplo:

1. **Linealidad:** Si f y g son integrables en $[a, b[$ y si sus respectivas integrales impropias son convergentes, entonces también existe, es decir, es convergente la integral impropia de $cf + dg$ sobre $[a, b[$; cualesquiera sea $c, d \in \mathbb{R}$ y se tiene:

$$\int_a^{b^-} (cf(x) + dg(x))dx = c\int_a^{b^-} f(x)dx + d\int_a^{b^-} g(x)dx$$

2. **Regla de Barrow:** Si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b[$, si $F : [a, b[\to \mathbb{R}$ es una función primitiva de f en $[a, b[$ y si existe el límite:

$$\int_a^{b^-} f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \Big(F(t) - F(a)\Big).$$

Entonces este límite es el valor de $\displaystyle\int_a^{b^-} f(x)dx$ lo cual lo podemos abreviar como:

$$F(x)\Big|_a^{b^-}$$

3. **Cambio de variable**

   - Si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$.
   - Si $\varphi : [\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ tiene derivada continua en su dominio, $-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$ tal que $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) \to b^-$ cuando $t \to \beta^-$ y si
   - $\varphi([\alpha, \beta[) = [a, b]$

   entonces
   $$\int_a^{b^-} f(x)\,dx = \int_\alpha^{\beta^-} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$
   Si una de las integrales es convergente (divergente) la otra también lo es.

4. **Integración por partes:** Si u y v son funciones con derivada continua en $[a, b[$ y son convergentes dos de los tres términos de la ecuación 6.2, entonces el tercero también lo es y se tienen la igualdad:
   $$\int_a^{b^-} u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^{b^-} - \int_a^{b^-} u'(x)v(x)\,dx \tag{6.2}$$

Observación 6.1.19 Todas las propiedades son validas para integrales sobre intervalos de la forma $]a, b]$, cambiando a por a^+ y b^- por b.

Criterios de convergencia para integrales de segunda clase

Criterio de Comparación

Si f y g son funciones positivas, integrables en $[x, b]$,para todo $x \in]a, b[$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in]a, b[$. Entonces:

- Si $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge. además se cumple que
  $$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$
- Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ diverge ,entonces $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ diverge.

Observación 6.1.20 La demostración del criterio de comparación está basado en las propiedades de la integral de Riemann y de los límites. en particular de la propiedad siguiente: Si $h :]a, b[\to \mathbb{R}$ es creciente y acotada superiormente, entonces $\lim_{x\to b^-} h(x)$ existe.

Criterio de comparación al límite

Si las funciones f, g son positivas e integrables en $[x, b]$ para todo $x \in]a, b[$, tales que

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0,$$

entonces las integrales impropias $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ y $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ ambas convergen o ambas divergen.

Si $k = 0$, entonces la convergencia de $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ implica la convergencia de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Ejemplo 6.1.21 1. La integral $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$ diverge. En efecto, como el integrando tiene una discontinuidad en $x = 1$ y usando el criterio de comparaciòn al límite, escogeremos como g la función $\dfrac{1}{x-1}$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\dfrac{1}{x^3 - x^2 + 4x - 4}}{\dfrac{1}{x-1}} \\ &= \frac{x-1}{x^3 - x^2 + 4x - 4} \\ &= \frac{x-1}{(x-1)(x^2+4)} \\ &= \frac{1}{x^2+4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

Como $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x-1}dx$ diverge, la integral dada inicialmente también diverge.

2. La integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$ es convergente ya que:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} : \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{x}{\operatorname{sen} x}} = 1.$$

Así, como el cuociente es 1, sabemos que ambas integrales convergen, o ambas integrales divergen. Por lo tanto, usando la convergencia de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, podemos concluir que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$ converge.

3. La integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x^3}}$ diverge. Ya que,

$$\frac{e^x}{\sqrt{x^3}} : \frac{1}{x^{3/2}} = e^x,$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{e^x}{\sqrt{x^3}}}{\dfrac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1,$$

Implica que el límite del cuociente cuando $x \to 0$ es 1, por tanto, ambas integrales convergen, o ambas divergen; y como la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}$ es divergente, pues el exponente de x es mayor que 1, podemos concluir que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x^3}}$ diverge. Notemos que como ya hemos estudiado la convergencia en un intervalo del tipo $\mathcal{S} =]0, a[;\ a \in \mathbb{R}$, y hemos concluido que la integral allí es divergente, no es necesario estudiar que ocurre en todo $\mathbb{R}^+$, por cuanto si diverge en $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^+$, diverge en todo $\mathbb{R}^+$

6.1.4. Otros criterios

Los criterios generales estudiados anteriormente no son suficientes para todas las distintas posibilidades que pueden darse, por ejemplo la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx,$$

no puede ser estudiada con dichos criterios. Para ello se necesitan teoremas más específicos como el siguiente.

Teorema 6.1.22 Si f y g son funciones tales que:

1. f es continua en $[a, \infty[$.
2. g' es continua en $[a, \infty[$, $g'(x) \leq 0$ y $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

3. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es acotada para $x \geq a$,

entonces
$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx,$$
es convergente.

Ejemplo 6.1.23 La integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$. converge.
En efecto, consideremos:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx.$$

Notemos que esta integral no es impropia en 0, por cuanto existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$; así, en $x = 0$ el integrando no diverge a $\pm\infty$, y por tanto podemos separar el dominio de integración en dos intervalos de la forma $[0, a[$ y $[a, +\infty[$. Por simplicidad, consideraremos $a = 1$, así:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$
En el capítulo 3, vimos que dos funciones integrables que difieren en un punto, tienen la misma integral. Sea:
$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

Entonces:
$$\int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

Luego $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ existe.
En cuanto a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, sean: $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ Esto implica que $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ Por tanto:

- Como $f(x) = \operatorname{sen} x$ es continua en $\mathbb{R}$, en particular lo es en $[1, +\infty[$
- $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ es continua en $[1, +\infty[$ y es negativa en dicho intervalo, además:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- $F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \operatorname{sen} t dt = -\cos t \Big|_1^x = \cos 1 - \cos x$, y como:

$$\begin{array}{rcl} -1 \leq & \cos x & \leq 1 \\ -1 \leq & -\cos x & \leq 1 \\ \cos 1 - 1 \leq & \cos 1 - \cos x & \leq \cos 1 + 1 \\ \cos 1 - 1 \leq & F(x) & \leq \cos 1 + 1 \end{array}$$

  Por lo tanto, $F(x)$ es acotada, para todo $x \geq 1$

Así, aplicando el teorema 6.1.22, vemos que se cumplen las hipotesis por este requeridas, y por tanto:

$$\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \qquad \text{converge.}$$

Lo cuál implica que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx, \qquad \text{converge.}$$

6.1.5. La función Gama

Dado $p > 0$, no necesariamente un entero, definimos la función llamada Gama, mediante la integral

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Esta función cumple las siguientes propiedades:

1. $\Gamma(p)$ está bien definida para todo $p > 0$. (i.e. $\Gamma(p) \in \mathbb{R}$).
   Para ello divida el intervalo de integración en dos partes: desde $x = 0$ hasta 1 y desde 1 hasta $x = \infty$ y analice la convergencia de ambas integrales impropias.

2. $\Gamma(1) = 1$.

3. $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$.

4. Si $p \in \mathbb{N}$, entonces
   $$\Gamma(p) = (p-1)!.$$

5. Si $p = n + r$ con $n \in \mathbb{N}$ y $r \in (0,1)$, entonces
   $$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)...(p-n)\Gamma(r).$$
   Esto nos dice que basta tabularla en $(0,1)$.

6. Mediante el cambio de variable $x = y^2$ se tiene

$$\Gamma(p) = 2\int_0^{+\infty} y^{2p-1}e^{-y^2}dy.$$

A partir de lo cual podemos deducir que:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} y^0 e^{-y^2}dy = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

$$\frac{1}{2}\Gamma(\frac{n+1}{2}) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx.$$

7. Si $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\Gamma(n/2) = 2\int_0^{+\infty} y^{n-1}e^{-y^2}dy.$$

8. Si $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\Gamma(n/2) = (n-2)\int_0^{+\infty} y^{n-3}e^{-y^2}dy.$$

6.1.6. La función Beta

Dado $p > 0$ y $q > 0$ no necesariamente enteros, definimos la función llamada Beta, mediante la integral

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

La cuál cumple las siguientes propiedades:

1. $\beta(p,q)$ está bien definida para todo $p > 0, q >$ (i.e. $\beta(p,q) \in \mathbb{R}$)

2. $$\beta(p,1) = \frac{1}{p}.$$

3. (Simetría)

$$\beta(p,q) = \beta(q,p).$$

4. $\beta(p,q) = \dfrac{q-1}{p}\beta(p+1,q-1)$.

5. Si $q \in \mathbb{N}$, entonces
$$\beta(p,q) = \frac{(q-1)!}{p(p+1)...(p+q-1)},$$
y análogamente si p es entero.

6. Si $q \in \mathbb{N}$, entonces multiplicando numerador y denominador por $\Gamma(p)$ se tiene
$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)}.$$

7. Haciendo el cambio $x = \operatorname{sen}^2(t)$, se tiene
$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}(t)\cos^{2q-1}(t)dt.$$

8. $$\beta(1/2,1/2) = \pi.$$

9. Suponiendo que la fórmula (6) es cierta siempre. podemos demostrar que
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$
y
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ejercicios resueltos

1. Dos amigos deciden ir a ver una pelicula al cine, pero no logran decidir cuál. El primero propone "El Mosquito Asesino", y el segundo "La Lagartija Sinvergüenza". Para dirimir el problema, el primer amigo propone al segundo que resuelva la siguiente integral:
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx$$

Si la solución es correcta, verán "La Lagartija Sinvergüenza", sino, verán "El Mosquito Asesino". Considerando el segundo amigo que el problema es bastante fácil, acepta el desafío, y resuelve:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} = \int_{-1}^{1} x^{-2} dx = \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$$

El primero dice entonces: "Creo que iremos a ver mi pelicula".

a) ¿Cómo pudo el primer amigo, sin resolver la integral, saber que el otro se equivocó?

b) ¿Cúal fue el error del segundo amigo?. ¿Cúal es el verdadero valor del problema propuesto?

Solución:

a) Sin resolver la integral, el primer amigo notó que como $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $\dfrac{1}{x^2} > 0$, para todo $x \in [-1, 1]$; Luego, necesariamente, según la teoría, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} > 0$. Así, sin resolver la integral, detectó que la solución era incorrecta.

b) El error fue el siguiente:
Si $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; Con $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$; entonces $0 \notin Dom(f)$, por tanto, la integral se debe separar en dos casos:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2};$$

En donde cada integral es impropia de segunda clase. No obstante, usando el ejemplo 6.1.18, podemos decir que la integral $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$, diverge, por tanto $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}$ diverge.

2. Resolver:

a) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dx$

b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^2} dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}dx$ Es una integral impropia de primera clase.

Usando la definición:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}dx = \lim_{l\to+\infty}\int_0^l \frac{x^2}{1+x^2}dx;$$

Sumando y restando 1 en el numerador, obtenemos:

$$\lim_{l\to+\infty}\int_0^l \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \lim_{l\to+\infty}\int_0^l \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \lim_{l\to+\infty}\left\{\int_0^l dx - \int_0^l \frac{1}{1+x^2}dx\right\}.$$

Como $\arctan x$ es una primitiva de $\dfrac{1}{1+x^2}$, tenemos que:

$$\lim_{l\to+\infty}\left\{\int_0^l dx - \int_0^l \frac{1}{1+x^2}dx\right\} = \lim_{l\to+\infty}\left\{x\Big|_0^l - \arctan x\Big|_0^l\right\}$$

$$\lim_{l\to+\infty}(l-\arctan l+\arctan 0) = \lim_{l\to+\infty}(l-\arctan l)$$

Aplicando límite obtenemos:

$$\lim_{l\to+\infty}(l-\arctan l) = +\infty - \frac{\pi}{2} = +\infty.$$

Por lo tanto: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}dx = +\infty$, Por lo cuál la integral diverge.

b) Notemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

Podemos escribir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{1+x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

Como la segunda integral diverge, por lo calculado en $2a$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}dx$ diverge

3. Utilice el Teorema 6.1.22 para demostrar la convergencia de:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Solución: Como:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\sqrt{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0\cdot 1 = 0\end{aligned}$$

Al igual que el ejemplo 6.1.23, la integral:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}dx$$

no es impropia, y por lo tanto:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}dx \in \mathbb{R}.$$

Para analizar la convergencia de $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}dx$, aplicamos el teorema 6.1.22, con:

$$\begin{aligned}f(x) &= \operatorname{sen} x\\ g(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

- f es continua en $[1,+\infty[$
- $g'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$ es continua y negativa en $[1,+\infty[$. Además, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $F(x) = \displaystyle\int_1^x \operatorname{sen} t dt = -\cos t + \cos 1$ es acotada para $x \geq a$.

Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del teorema 6.1.22, y entonces $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}dx$ converge.

4. Demuestre que:

$$\int_0^1 \ln^n x = (-1)^n n!;\ n\in\mathbb{N}_0$$

Notación: $\ln^n x = (\ln x)^n$

Solución: Consideremos:

$$\int_0^1 \ln^n x$$

Notemos que $0 \notin Dom(\ln x)$, por lo tanto debemos calcular:

$$\int_{0^+}^1 \ln^n x$$

Así, en virtud de la definición de integral impropia de segunda clase:

$$\int_{0^+}^1 \ln^n x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln^n x$$

Sea:

$$\begin{aligned} &x = e^p, \quad \text{entonces:} \\ &dx = e^p dp \end{aligned}$$

Y por tanto:

- Si $x = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} &e^p = 1 \iff \\ &p = \ln 1 \iff \\ &p = 0 \end{aligned}$$

- Si $x = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} &e^p = \varepsilon \iff \\ &p = \ln \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln^n x &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\ln \varepsilon}^0 e^p \cdot \ln^n e^P dp \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\ln \varepsilon}^0 p^n e^p dp \end{aligned}$$

Notemos que si $\varepsilon \to 0^+$, entonces $\ln \varepsilon \to -\infty$. Sea $\mu = \ln \varepsilon$; entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\ln \varepsilon}^0 p^n e^p dp &= \lim_{\mu \to -\infty} \int_\mu^0 p^n e^p dp \\ &= -\lim_{\mu \to -\infty} \int_0^\mu p^n e^p dp \end{aligned}$$

Sea:

$$p = -t; \text{ entonces:}$$
$$dp = -dt$$

- Si $p = 0$, eontonces $-t = 0$, lo cuál implica que $t = 0$
- Si $p = \mu$, eontonces $-t = \mu$, lo cuál implica que $t = -\mu$.

Y por tanto:

$$\begin{aligned}
-\lim_{\mu\to-\infty}\int_0^{\mu} p^n e^p dp &= -\lim \mu \to -\infty \int_0^{-\mu} -(-t)^n e^{-t} dt \\
&= \lim_{\mu\to-\infty}\int_0^{-\mu}(-t)^n e^{-t} dt \\
&= (-1)^n \lim_{\mu\to-\infty}\int_0^{-\mu} t^n e^{-t} dt
\end{aligned}$$

Notemos que cuando $\mu \to -\infty$, tenemos que $-\mu \to +\infty$. Sea $\beta = -\mu$, entonces:

$$(-1)^n \lim_{\mu\to-\infty}\int_0^{-\mu} t^n e^{-t} dt = (-1)^n \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta} t^n e^{-t} dt$$

Lo cual, por definición de integral impropia de primera clase es:

$$(-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

Y por tanto, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
(-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt &= (-1)^n \int_0^{+\infty} t^{(n+1)-1} e^{-t} dt \\
&= (-1)^n \Gamma(n+1); \text{ como } n \in \mathbb{N} \\
&= (-1)^n n!
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^1 \ln^n x = (-1)^n n!; \ n \in \mathbb{N}_0$$

5. Para $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3}$

a) Determine $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$

b) Determine $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)dx$

c) Calcule:

$$\int_L f(x)dx;\ \text{Donde:} L = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 2\}$$

Solución:

a) En este caso, la integral es impropia tanto de primera clase como de segunda clase, por cuanto, por un lado estamos trabajando sobre un dominio no acotado $[0, +\infty[$, y además $0 \notin Dom(f)$; luego nos conviene separar el dominio de integración en dos partes, de la forma $[0, +\infty[= [0, a[\cup [a, +\infty[$. pero como sabemos que f está definida para todo $a \in \mathbb{R}^+$, escogemos $a = 1$, Así:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3}dx = \int_0^1 \frac{x+1}{x^3}dx + \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^3}dx.$$

Y ocupando la definición, esto es igual a:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{x+1}{x^3}dx + \lim_{l \to +\infty} \int_1^l \frac{x+1}{x^3}dx.$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^3}dx &= \int \left(\frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right) dx \\
&= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx \\
&= -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C.
\end{aligned}$$

luego:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{x+1}{x^3}dx + \lim_{l \to +\infty} \int_1^l \frac{x+1}{x^3}dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_\epsilon^1 + \lim_{l \to +\infty} \left(-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^l$$

Evaluando obtenemos:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \left\{(-2-1) - \left(-\frac{1}{2\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon}\right)\right\} + \lim_{l \to +\infty} \left\{\left(-\frac{1}{2l^2} - \frac{1}{l}\right) - (-2-1)\right\};$$

Lo cual es simplemente:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(-3+\frac{1}{2\epsilon^2}+\frac{1}{\epsilon}\right)+\lim_{l\to+\infty}\left(\frac{1}{2l^2}-\frac{1}{l}+3\right)$$

Aplicando límite obtenemos:

$$(-3+\infty+\infty)+(0-0+3)=+\infty+3=+\infty.$$

Por lo tanto, la integral diverge.

b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)dx=\int_2^{+\infty}\frac{x+1}{x^3}dx$ Esta es una integral impropia de primera clase, pues esta sobre un dominio de integración no acotado, pero f está definida para todo valor en el intervalo $[2,+\infty[$. Así, aplicando la definición obtenemos que:

$$\int_2^{+\infty}\frac{x+1}{x^3}dx=\lim_{p\to+\infty}\int_2^{p}\frac{x+1}{x^3}dx$$

Usando los resultados del item anterior, concluimos que:

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty}\frac{x+1}{x^3}dx &= \lim_{p\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_2^p\\ &= \lim_{p\to+\infty}\left\{\left(-\frac{1}{2p^2}-\frac{1}{p}\right)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\right\}\\ &= \lim_{p\to+\infty}\left(-\frac{1}{2p^2}-\frac{1}{p}+1\right)\end{aligned}$$

Aplicando límite obtenemos:

$$0-0+1=1.$$

Por lo tanto:

$$\int_2^{+\infty}\frac{x+1}{x^3}dx=1$$

c)

$$\begin{aligned}\int_L f(x)dx &= \int_{-\infty}^{-2} f(x)dx+\int_2^{+\infty} f(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{-2}\frac{1}{x^2}dx+\int_{-\infty}^{-2}\frac{1}{x^3}dx+\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx+\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx\end{aligned}$$

las integrales de la forma $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$, con $p > 1$, $a > 0$ convergen. Además, como $\dfrac{1}{x^2}$ es par y $\dfrac{1}{x^3}$ es impar, entonces claramente:

$$\int_L \frac{1}{x^2}dx = 2\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}$$

$$\int_L \frac{1}{x^3}dx = 0$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\int_L f(x)dx &= 2\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \\
&= 2\lim_{c\to+\infty}\left(\int_2^c \frac{1}{x^2}\right) \\
&= 2\lim_{c\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_2^c \\
&= 2\lim_{c\to+\infty}\left(-\frac{1}{c}+\frac{1}{2}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

6. Dada:

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|};\ x \in \mathbb{R}$$

a) Calcule, si es que existe, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

b) Si $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(u)du$, Sin resolver la integral, determine:

1) Dominio de f.

2) Signo de f.

c) Responda la pregunta anterior, resolviendo la integral.

d) Generalice el Teorema Fundamental del Cálculo, para calcular $F'(x)$. Analice la existencia de puntos críticos y el crecimiento de F.

e) Calcule $F''(x)$. Analice la curvatura de F.

f) Determine, si existen, asintotas horizontales y verticales de F

g) ¿Cuál es el recorrido de F?. Deduzca que $0 \leq F(x) \leq 1$

h) Cálcule, si es que existen:

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx$

i) Determine $M \in \mathbb{R}$, tal que $F(M) = \dfrac{1}{2}$

j) Determine $P \in \mathbb{R}$, tal que $F(P) = \alpha$

Solución:

a) Si estudiamos que ocurre en $\mathbb{R}^+$, Como sobre $[0, +\infty[$, $|x| = x$, podemos escribir simplemente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx,$$

Sea $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$. Esta integral puede ser resuelta por dos caminos posibles.

1) Usando la definición:

$$\begin{aligned} I = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{p \to +\infty} \int_0^p e^{-x} dx \\ &= \lim_{p \to +\infty} -e^{-x} \Big|_0^p \\ &= \lim_{p \to +\infty} (-e^{-p} + 1) \end{aligned}$$

Como $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{e^p} = 0$; se tiene que:

$$\lim_{p \to +\infty} (-e^{-p} + 1) = 0 + 1 = 1.$$

Luego:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1,$$

luego, el resultado es: $\dfrac{1}{2} \cdot I = \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

2) Usando la función gamma:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

Colocaremos la integral a resolver bajo esta forma; así:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} x^0e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} x^{1-1}e^{-x}dx = \Gamma(1)$$

Como $1 \in \mathbb{N}$; tenemos $\Gamma(1) = 0! = 1$.

luego, el resultado es: $\dfrac{1}{2} \cdot I = \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

Como $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$ es una función par, entonces podemos decir que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx.$$

así:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

b) Si $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(u)du$, entonces:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{-|u|}du.$$

Como el integrando, $f(u) = \dfrac{1}{2}e^{-|u|}$, es continuo para todo $u \in \mathbb{R}$, y sabemos que la integral de esta función converge en $\mathbb{R}$, entonces F siempre existe, asi $Dom(F) = \mathbb{R}$. Por otra parte, como la función exponencial es siempre positiva, entonces:

$\dfrac{1}{2}e^{-|u|} \geq 0$, para todo $u \in \mathbb{R}$, luego:

$\displaystyle\int_{\mathcal{A}} \frac{1}{2}e^{-|u|}du \geq 0$, para todo $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$; en particular si $\mathcal{A} =]-\infty, x]$; $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(u)du \geq 0; \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Luego, F es siempre positiva.

c) Resolviendo la integral:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{-|u|}du.$$

Notemos, que como hay un valor absoluto en el integrando, debemos distinguir entre los casos $x > 0, x \leq 0$.
Sea $\mathcal{B} =]-\infty, x]$

- Si $x \leq 0$, entonces $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^-$, por tanto $|u| = -u$, para todo $u \in \mathcal{B}$. Así:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}e^{-|u|}du \\ &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}e^{-(-u)}du \end{aligned}$$

Luego, el problema se reduce a calcular:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{u}du.$$

Ocupando la definición tenemos que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{u}du = \lim_{p \to -\infty} \int_{p}^{x} \frac{1}{2}e^{u}du$$

Calculando la primitiva,y evaluando en los límites de integración, obtenemos:

$$F(x) = \lim_{p \to -\infty} \frac{1}{2}e^{u}\bigg|_{p}^{x} = \frac{1}{2}\lim_{p \to -\infty}(e^{x} - e^{p})$$

Como sabemos que si $p \to -\infty$, entonces $e^{p} \to 0$ nos queda que:

$$\frac{1}{2}\lim_{p \to -\infty}(e^{x} - e^{p}) = \frac{1}{2}e^{x}$$

Luego, podemos concluir que:

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{x};\ x \geq 0$$

- Si $x > 0$, entonces $\mathcal{B} = \mathbb{R}_0^- \cup \mathcal{L}$, donde $\mathcal{L} =]0, x] \subseteq \mathbb{R}^+$, Así:

$$F(x) = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}e^{-|u|}du = \int_{\mathbb{R}_0^- \cup \mathcal{L}} \frac{1}{2}e^{-|u|}du.$$

Como los conjuntos son disjuntos, obtenemos simplemente:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_0^- \cup \mathcal{L}} \frac{1}{2}e^{-|u|}du = \int_{\mathbb{R}_0^-} \frac{1}{2}e^{-|u|}du + \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{2}e^{-|u|}du$$

Claramente $|u| = u$, para todo $u \in \mathcal{L}$, y $|u| = -u$, para todo $u \in \mathbb{R}_0^-$, luego:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_0^-} \frac{1}{2}e^{u}du + \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{2}e^{-u}du$$

Lo que en terminos más simples puede ser escrito como:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{u}du + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-u}du$$

Claramente el primer miembro de la suma es $F(0)$. Así,

$$F(x) = F(0) + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-u}du = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-u}du$$

Resolviendo la integral involucrada, obtenemos que:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-e^{-u}\Big|_0^x) = \frac{1}{2}(1 - e^{-x}) + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$$

Por lo tanto:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x};\ x > 0$$

Así:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & \text{Si } x < 0 \\ \\ 1 - \frac{1}{2}e^{x} & \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

Donde claramente se aprecia que $Dom(F) = \mathbb{R}$, además, como la función exponencial es siempre positiva, vemos que la primera rama de la función lo es, en cuanto a la segunda rama, notemos que e^{-x} es una función decreciente, cuyo máximo valor en $\mathbb{R}_0^+$ se alcanza en el 0, y este valor es 1, a partir de ahi la función siempre decrece y por tanto la tercera rama es siempre positiva.

d) Recordemos que el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que si:

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt;\ a \in \mathbb{R};\ \text{entonces:}$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt = f(x)$$

Como este teorema es valido para integrales de Riemann, que no son impropias, escribimos:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{-|u|}du = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{2}e^{-|u|}du + \int_{a}^{x} \frac{1}{2}e^{-|u|}du;\ \text{con } a \in \mathbb{R}$$

luego:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{2}e^{-|u|}du + \int_{a}^{x} \frac{1}{2}e^{-|u|}du\right)$$

Como $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{2}e^{-|u|}du$ existe, y es constante, su derivada es 0. En cuanto a $\displaystyle\int_{a}^{x} \frac{1}{2}e^{-|u|}du$, como $a \in \mathbb{R}$, es una integral de Riemann, y por tanto, podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo, Así:

$$F'(x) = 0 + \frac{1}{2}e^{-|x|} = \frac{1}{2}e^{-|x|} = f(x).$$

Luego:

$$F'(x) = 0,\ \text{si y solo si,}\ \frac{1}{2}e^{-|x|} = 0.$$

Lo cual jamás ocurre ;así, F carece de puntos críticos. Por otro lado, como $F'(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, F es siempre creciente.

e) $F''(x) = \dfrac{d}{dx}(F'(x)) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}e^{-|x|}\right)$

Notemos que:

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x};\ x < 0 \\ \\ \frac{1}{2}e^{-x}\ x \geq 0 \end{cases}$$

Luego:

- Si $x < 0$:

$$\frac{d}{dx}(F'(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{x}\right) = \frac{1}{2}e^{x}$$

- Si $x > 0$:

$$\frac{d}{dx}(F'(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{-x}\right) = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

- Si $x = 0$:
  Como en este punto se produce un cambio de definición de F', debemos estudiar la existencia de $F''(0) = f'(0)$, Usando la definición de derivada:

  $$F''(0) = f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

  o simplemente
  $$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

  Notemos que si $h \to 0^+$, entonces $f(h) = \frac{1}{2}e^{-h}$, pero si en cambio $h \to 0^-$, tenemos que $f(h) = \frac{1}{2}e^{h}$; por tanto deben separarse los casos:

  $$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}e^{-h} - \frac{1}{2}}{h}$$

  factorizando
  $$\lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}(e^{-h} - 1)}{h} = \frac{1}{2} \lim_{h\to 0^+} \frac{(e^{-h} - 1)}{h}$$

  Recordemos que:
  $$\lim_{u\to 0} \frac{b^u - 1}{u} = \ln b$$

  haciendo un cambio de variable de la forma $h = -u$, notamos que si $h \to 0^+$, entonces $u \to 0^-$, y podemos reescribir nuestro límite como:

  $$\frac{1}{2} \lim_{u\to 0^-} \frac{e^u - 1}{-u} = -\frac{1}{2} \lim_{u\to 0^-} \frac{e^u - 1}{u} = -\frac{1}{2} \ln e = -\frac{1}{2}$$

  Notemos que como el límite que hemos usado de referencia existe para $u \to 0$, significa que en particular existe por derecha y por izquierda, y obviamente converge al mismo valor.
  Por otro lado, si $h \to 0^-$

  $$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}e^{h} - \frac{1}{2}}{h}$$

  factorizando
  $$\lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{2}(e^{h} - 1)}{h} = \frac{1}{2} \lim_{h\to 0^-} \frac{(e^{h} - 1)}{h}$$

En este caso, aplicamos en forma directa el límite de referencia y vemos que:

$$\frac{1}{2}\lim_{h\to 0^-}\frac{(e^h-1)}{h}=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$$

Así, vemos que no existe el límite cuando h tiende a 0, y por ende, no existe $F''(0)$

Luego:

$$F''(x)=f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^x;\ x<0\\ \\ -\frac{1}{2}e^{-x};\ x>0\end{cases}$$

o lo que es lo mismo:

$$F''(x)=-\frac{1}{2}\text{Signo}(x)e^{-|x|};\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Observando la forma de F'', vemos que $F''>0$, si $x<0$, y $F''<0$, si $x>0$, luego la función F es:

- Convexa sobre $]-\infty,0[$
- Concava sobre $]0,+\infty[$

Es interesante notar que el 0 es un punto de inflexión para F, pese a que $F''(0)$ no está definida; la razón, es que en $x=0$, hay un punto de cambio de curvatura, recuerde que $F(0)$ si está definida.

f) 1) Asintotas Verticales: Como F es continua, carece de asintotas verticales.

2) Asintotas Horizontales:

- $\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=1$, por lo visto en $6a$. Luego la recta $y=1$ es una asintota horizontal
- $\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_{-\infty}^{-\infty}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0$, pues la integral $\int_{-\infty}^{u}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx$ es convergente para todo $u\in\mathbb{R}$. Luego la recta $y=0$ es otra asintota horizontal

g) Como F es derivable en todo $\mathbb{R}$, entonces F es continua en todo $\mathbb{R}$; además, como F es siempre creciente y positiva, y tiene por asintotas verticales las rectas $y=0$ e $y=1$, entonces $Rec(f)=]-1,1[$; luego $0\leq F(x)\leq 1$

h) h-1 Para analizar la existencia de la integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx$ Analizaremos la existencia de la integral sobre $\mathbb{R}^+$. Usando integración por partes tenemos

$$\int_0^c xe^{-x}\,dx = \left(-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx\right)\Big|_0^c.$$

Tomando el límite cuando $c\to+\infty$, obtenemos que dicha integral converge. Ahora podemos usar que f es par y x es impar, y por lo tanto, su producto es impar. Así, la integral sobre $\mathbb{R}$ vale cero.

Observación: Este problema puede ser resuelto usando la función Γ.Se recomiemda al estudiante que, como ejercicio, lo resuelva por esta vía que es mucha más rápida.

h-2 Nuevamente analizaremos la existencia de la integral impropia sobre $\mathbb{R}^+$. Esto puede ser hecho usando la definición o la función Γ . Presentaremos ambos métodos.

Usando la definición tenemos,

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx = .$$

Integrando por partes:

$$\begin{cases} u = x^2 & \Longrightarrow \quad du = 2xdx \\ dv = e^{-x}dx & \Longrightarrow \quad v = -e^{-x}. \end{cases}$$

Así, tenemos que

$$\lim_{c\to+\infty}\int_0^c x^2e^{-x}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\Big(-e^{-x}x^2\Big|_0^c + 2\int_0^c xe^{-x}\,dx\Big).$$

Aplicando la propiedad de límites,

$$\lim_{c\to+\infty}\Big(-e^{-x}x^2\Big|_0^c\Big) + 2\lim_{c\to+\infty}\int_0^c xe^{-x}\,dx.$$

Aplicando nuevamente integración por partes:

$$\begin{cases} u = x & \Longrightarrow \quad du = dx \\ dv = e^{-x}dx & \Longrightarrow \quad v = -e^{-x}. \end{cases}$$

Así, obtenemos

$$
\begin{aligned}
& \lim_{c\to+\infty}\Big(-e^{-x}x^2\Big|_0^c\Big)+2\lim_{c\to+\infty}\Big(-e^{-x}x\Big|_0^c+\int_0^c e{-}xdx\Big)\\
& \lim_{c\to+\infty}\frac{-c^2}{e^c}+2\lim_{c\to+\infty}\frac{-c}{e^c}+2\lim_{c\to+\infty}(-e^{-x})\Big|_0^c\\
& -\lim_{c\to+\infty}\frac{-c^2}{e^c}-2\lim_{c\to+\infty}\frac{c}{e^c}-2\lim_{c\to+\infty}(e^{-c}-1)\\
& =(**)
\end{aligned}
$$

El primer y segundo límite dan origen a formas indeterminadas de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, para los cuales usaremos regla de L' Hopital. el tercer límte es directo. Así, la expresión (**) queda como:

$$
\begin{aligned}
(**) &= -\lim_{c\to+\infty}\frac{2c}{e^c}-2\lim_{c\to+\infty}\frac{1}{e^c}-2(0-1)\\
&= -\lim_{c\to+\infty}\frac{2}{e^c}+2=2.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx = 2.$$

Usando la función Gamma

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} x^{3-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(3).$$

Como $3\in\mathbb{N}$, entonces $\Gamma(3)=2!=2\,.$

i)

$$F(M)=\frac{1}{2} \iff \int_{-\infty}^{M}\frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx=\frac{1}{2}.$$

Pero,

$$F(M)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{M}\,, & M<0\\ 1-e^{-M/2}\,, & M\geq 0.\end{cases}$$

- Si $M<0$

$$F(M)=\frac{1}{2} \iff \frac{1}{2}e^M=\frac{1}{2} \iff e^M=1 \iff M=\ln 1 \iff M=0.$$

- Si $M \geq 0$

  $$F(M) = 1 - \frac{e^{-M}}{2} = \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2}e^{-M} = -\frac{1}{2} \iff e^{-M} = 1 \iff M = 0.$$

  Luego,

  $$F(M) = \frac{1}{2} \iff M = 0.$$

j)

$$F(P) = \alpha \iff \int_{-\infty}^{P} \frac{1}{2}e^{-}|x|\,dx = \alpha.$$

Notemos que si $\alpha = \dfrac{1}{2}$, entonces $P = 0$ por lo visto en $6i$. Como F es creciente, si $\alpha < \dfrac{1}{2} \implies P < 0$ y se busca con la definición de F sobre $\mathbb{R}^-$, y si $\alpha > \dfrac{1}{2} \implies P > 0$ y se busca usando la definición de F sobre $\mathbb{R}^+$.

- Si $\alpha < \dfrac{1}{2}$

  $$F(P) = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2}e^P = \alpha \iff e^P = 2\alpha \iff P = \ln 2\alpha.$$

- Si $\alpha < \dfrac{1}{2}$

  $$F(P) = \frac{1}{2} \iff 1 - \frac{1}{2}e^P = \alpha \iff 2 - e^P = 2\alpha \iff 2 - 2\alpha = e^P \iff P = \ln(2 - 2\alpha).$$

Así,

$$P = \begin{cases} \ln 2\alpha & \alpha < \dfrac{1}{2} \\ 0 & \alpha = \frac{1}{2} \\ \ln(2 - 2\alpha) & \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ejercicios propuestos

1. Demuestre que las siguientes integrales convergen e interprete geométricamente .

   a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

   b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$

   c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$

f) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$

g) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx$

h) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$

i) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1-x)}}\,dx$

Indicación: Usar comparación al límite con $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

j) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}}\,dx$

k) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$

l) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$

m) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

2. Demuestre que las siguientes integrales divergen e interprete geométricamente .

a) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{x})}\,dx$

f) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x^3}}\, dx$

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x\, dx$

j) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\, dx$

3. Demuestre que
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\, dx = n!$$
Indicación: Use fórmulas de reducción o Función Gama.

4. Demuestre que
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(\alpha x)\, dx = \frac{1}{1+\alpha^2}$$

5. Demuestre que

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + 2\arctan(x\sqrt{2}+1) + 2\arctan(x\sqrt{2}-1) + c\right].$

Indicación:
$$\begin{aligned} 1+x^4 &= 1+x^4+2x^2-2x^2 \\ &= (1+x^2)^2-2x^2 \\ &= (1-x\sqrt{2}+x^2)(1+x\sqrt{2}+x^2). \end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

6. Demuestre que

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4+1}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2} + 2\arctan(x\sqrt{2}+1) + 2\arctan(x\sqrt{2}-1) + c\right].$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

7. Demuestre que
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2+x^4+x^6}\,dx = \frac{\pi}{4}$$
Indicación: Observe que
$1+x^2+x^4+x^6 = (1+x^2)(1+x^4)$ y use los ejercicios $1a$,$5b$, $6b$.

8. Demuestre que
$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx = \pi$$
Indicación: Use el cambio de variable $u = x - a$ y a continuacion use una nueva variable v de modo que
$u - \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}(b-a)v$.
No se olvide que al cambiar de variable debe cambiar los límites de integración.

9. *a*) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.¿Qué puede decir de la integral $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$?
   b) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}$.
   c) Demuestre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$
   converge usando criterio de comparación al límite con $g(x) = \dfrac{1}{x^p}$, eligiendo un p apropiado.

10. *a*) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos x}$.
    b) Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-\cos x}\,dx$
    diverge.

11. Demuestre que las siguientes integrales convergen:
    a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\operatorname{sen} x)\,dx$
    b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\tan x)\,dx$
    c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

12. Demuestre que la integral $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)dx$, converge.
    Use el cambio de variable: $y = \dfrac{1}{1-x}$.

13. Dada la curva $y = xe^x$, demuestre que el área A acotada asintóticamente por la parte negativa del eje X y la curva vale 1.

14. Demuestreque el volumen del sólido de revolución que resulta al girar en torno al eje X la región acotada por dos semiejes positivos, la recta $y = 1$ y la curva $y = \coth x - 1$, vale $\pi(1 + 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3)$.

15. Utilice el Teorema 6.1.22 para demostrar que las siguientes integrales convergen:

    a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\, dx$. Use el cambio de variable $u = \sqrt{x}$.

    b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\, dx$, si $0 < p < 2$.

6.2. Series Numéricas

Intuitivamente una serie es una suma infinita de números. Como aritméticamente no se puede sumar una cantidad infinita, estas sumas deben ser tratadas con el concepto de límite.

6.2.1. Conceptos generales

Definición 6.2.1 Una **serie de término general** a_n , $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ se denota

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

y se define :

1. La sucesión de **sumas parciales** de la serie como aquella cuyo término general es

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i. \tag{6.3}$$

2. La **suma de la serie** como el límite de la sucesión de sus sumas parciales, es decir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = S. \tag{6.4}$$

   Si tal límite existe, diremos que la serie **converge** hacia S, si el límite es $\pm\infty$ diremos que la serie **diverge** a $\pm\infty$ .Si las sumas parciales oscilan, diremos que la suma de la serie **oscila**.

Nuestro objetivo es estudiar métodos que permitan analizar la convergencia de series. En primera instancia debemos tener presente todo lo estudiado en la sección de sucesiones 1.2. Por ejemplo, según el **teorema de las sucesiones monótonas**, teorema 1.2.27, toda sucesión monótona y acotada es convergente, así obtenemos el más elemental de los criterios de convergencia para series.

Teorema 6.2.2 Si la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ es de términos positivos, es decir, $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y si la sucesión de sus sumas parciales es:

1. acotada superiormente, entonces la serie es convergente.
2. no es acotada superiormente, entonces la serie diverge a $+\infty$.

Teorema 6.2.3 Criterio de divergencia

1. Si la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ es convergente entonces la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a cero.

2. Si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiende a cero , entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ es divergente.

Demostración:

1. Si la serie es convergente entonces, la sucesión de sus sumas parciales converge. Además, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$. Como el término general de la serie se puede escribir en función de los S_n, tenemos:

$$a_n = S_n - S_{n-1},$$

luego,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

2. Si una serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ es tal que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0,$$

entonces no puede ser convergente.Pues, si lo fuera, por el ítem anterior tendríamos $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Y esto contradice la hipótesis. ■

Teorema 6.2.4 Criterio de Convergencia de Cauchy.
La sucesión (x_n) es convergente si y sólo si : dado $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal que $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, para todo $p \in \mathbb{N}$ y para todo $n \geq N$.

Una consecuencia de esta proposición es el siguiente teorema.

Teorema 6.2.5 La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ es convergente si y sólo si: dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon)$ tal que $|\sum_{n=N}^{n=N+p} a_n| < \varphi \in \mathbb{N}$ y para todo $n \geq N$.

Demostración: Se deduce del resultado anterior aplicado a la sucesión de sumas parciales $S_n = \sum_{j=0}^{j=n} a_j$. ■
Recordaremos una serie estudiada en la sección 1.2, la **serie geométrica** que es una de las series de referencia.

Una serie de referencia: la serie geométrica La serie geométrica de razón r, $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ es tal que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \lim_{n\to+\infty}(1 + r + r^2 + \cdots + r^n) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-r} & ;\ \text{si}\ \ |r| < 1 \\ +\infty & ,\ \text{si}\ \ r \geq 1 \\ \text{no existe} & ,\ \text{si}\ r \leq -1 \end{cases}$$

6.2.2. Criterios básicos de convergencia de series

En esta sección supondremos que las series son de término general positivo, es decir, $a_n \geq 0$.

Teorema 6.2.6 Criterio de Comparación:

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ son series de términos positivos y si existen $K \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que:

1. $a_n \leq Kb_n$ para todo $n \geq N$, entonces, la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ implica la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

2. $a_n \geq Kb_n$ para todo $n \geq N$ entonces, la divergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ implica la divergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Demostración: Si la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, entonces sus sumas parciales son acotadas, lo que a su vez implica que las sumas parciales de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ también lo son. Por lo tanto, converge.

Teorema 6.2.7 Criterio de comparación al límite Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ son series de términos positivos y si además se cumple que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = K,$$

entonces,

- Si $K \neq 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge.
- Si $K = 0$, entonces la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ implica la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Demostración: Para simplificar podemos suponer $K = 1$. De la definición de límite con $K = 1$ y $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ podemos deducir la existencia de un $n \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces,

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| < \frac{1}{2}$$

Si y solo si,

$$\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}.$$

El resultado se obtiene aplicando el teorema 6.2.6 dos veces.

Teorema 6.2.8 Criterio de D'Alembert o de la razón o del cuociente.
Si

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

entonces la serie de términos positivos,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ es } \begin{cases} \text{convergente si} & \rho < 1 \\ \text{divergente si} & \rho > 1 \\ \text{no se puede concluir nada si} & \rho = 1. \end{cases}$$

Demostración:

- Si $\rho < 1$.
  Dado $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal que $n \geq N(\varepsilon)$ implica que

  $$\rho - \varepsilon \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho + \varepsilon \,.$$

  Además, podemos suponer que $\rho + \varepsilon < 1$. En este caso :

  $$a_{n+1} \leq (\rho + \varepsilon) a_n \ , a_{n+2} \leq (\rho + \varepsilon) a_{n+1} \ \leq (\rho + \varepsilon)(\rho + \varepsilon) a_n \ = (\rho + \varepsilon)^2 a_n$$

  y sucesivamente

  $$a_{n+p} \leq (\rho + \varepsilon)^p a_n \,.$$

De esta forma,

$$\sum_{n=N}^{N+p} a_n \leq a_N \sum_{j=0}^{p} (\rho+\varepsilon)^j.$$

La última serie es una serie geométrica de razón menor que uno. Por lo tanto, es convergente. Luego,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{N} a_n + \sum_{n=N}^{+\infty} \leq \sum_{n=0}^{N} a_n + \sum_{j=0}^{+\infty} (\rho+\varepsilon)^j.$$

Por lo tanto, la serie converge.

- Si $\rho > 1$, asumiendo que $(\rho - \varepsilon) > 1$ se prueba la divergencia de la serie. ■

Ejemplo 6.2.9 Si $\lambda \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, x \in]0, \infty[$, consideremos la serie de término general:

$$a_n = n^\lambda x^n.$$

Aplicando el criterio de la razón tenemos,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^\lambda x^{n+1}}{n^\lambda x^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\lambda x.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x.$$

Luego, la serie es convergente para $0 < x < 1$ y divergente para $x > 1$.

Teorema 6.2.10 Criterio de la raíz o de Cauchy.
Si

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}},$$

entonces la serie de términos positivos,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ es } \begin{cases} \text{convergente si} & \rho < 1 \\ \text{divergente si} & \rho > 1 \\ \text{no se puede concluir nada si} & \rho = 1. \end{cases}$$

Demostración: La demostración de este resultado es similar a la demostración del criterio de la razón y se deja de ejercicio. ■

Ejemplo 6.2.11 Consideremos la serie de término general $a_n = 2^{-n-(-1)^n}$. Aplicando criterio de la raíz, tenemos,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} a_n^{1/n} &= \lim_{n\to+\infty} \left(2^{-n-(-1)^n}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{-n-(-1)^n}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} 2^{-1}2^{\frac{(-1)\cdot(-1)^n}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} 2^{-1}2^{\frac{(-1)^{n+1}}{n}} \\
&\quad \text{Usando la continuidad de la función } 2^x \\
&= 2^{-1}\cdot 2^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}} \\
&= 2^{-1}\cdot 2^0 = \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie es convergente.

Observe que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$, pues, por el teorema de acotamiento:

$$-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1$$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}$$

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} \leq 0$$

Teorema 6.2.12 **Relación entre el criterio de la raíz y de la razón**.
Si el límite $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ existe entonces, también existe $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$ y son iguales.

Observación 6.2.13 El teorema 6.2.12 dice que si uno obtiene la convergencia de una serie mediante el criterio de la razón, el criterio de la raíz da la misma información. Pero, el recíproco no es verdad, es decir existen casos en que el criterio de la raíz da la convergencia de una serie y el del cuociente no. Este es el caso de la serie dada en el ejemplo 6.2.11, para la cual $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ no existe. Ya que:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2^{-(n+1)-(-1)^{n+1}}}{2^{-n-(-1)^n}} = \frac{2^{-n-1-(-1)^n+1}}{2^{-n-(-1)^n}} \\ &= 2^{-n-1-(-1)^{n+1}+n+(-1)^n} = 2^{-1-(-1)^n\cdot(-1)+(-1)^n} \\ &= 2^{-1+2(-1)^n}.\end{aligned}$$

La sucesión $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ no tiene límite pues,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{-1+2(-1)^n} = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ es par} \\ \\ \dfrac{1}{8} \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Teorema 6.2.14 Criterio de la integral.
Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ es una serie de términos no negativos y si $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ es una función no negativa, decreciente e integrable, tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ y $f(n) = a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \left\{ S_n - \int_1^n f(x)dx \right\} \leq a_1.$$

En particular, la serie converge si y sólo si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Demostración: En efecto, para cada $k \in \mathbb{N}$ y $x \in [k, k+1]$ y usando que f es decreciente, se tiene la desigualdad:

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$$

Por las propiedades de integral, podemos escribir:

$$\int_k^{k+1} f(k)dx \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq \int_k^{k+1} f(k+1)dx$$

Como

$$\int_k^{k+1} f(k)dx = f(k)$$

Se tiene que,

$$a_k = f(k) = \int_k^{k+1} f(k)dx \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq \int_k^{k+1} f(k+1)dx = a_{k+1}.$$

Sumando estas desigualdades desde $k = 1$ hasta $k = n-1$ Obtenemos,

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \geq \int_1^n f(x)dx \geq a_2 + a_3 + \cdots + a_n = S_n - a_1.$$

Luego,

$$-S_{n-1} = a_n - S_n \leq -\int_1^n f(x)dx \leq a_1 - S_n.$$

Consecuentemente,

$$a_n \leq S_n - \int_1^n f(x)dx \leq a_1.$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito, tenemos:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty} \left(S_n - \int_1^n f(x)dx \right) \leq \lim_{n\to+\infty} a_1.$$

Así, por hipótesis:

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \left(S_n - \int_1^n f(x)dx \right) \leq a_1,$$

Que es el resultado enunciado.
Ahora demostraremos que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(S_n - \int_1^n f(x)dx \right)$ existe. Para ello demostraremos que la sucesión:

$$B_n = S_n - \int_1^n f(x)dx$$

es decreciente, por cuento del resultado anterior, sabemos que es acotada inferiormente por cero. En efecto,

$$\begin{aligned} B_n - B_{n+1} &= \left(S_n - \int_1^n f(x)dx \right) - \left(S_{n+1} - \int_1^{n+1} f(x)dx \right) \\ &= \int_n^{n+1} \left(f(x) - f(n+1) \right) dx \geq 0, \quad \text{pues } f \text{ es decreciente.} \end{aligned}$$

Entonces, en virtud del Teorema de las Sucesiones Monotonas, la sucesión B_n tiene límite, es decir:

$$\lim_{n\to+\infty} B_n \in \mathbb{R}$$

■

Observación 6.2.15 Como consecuencia de la existencia del límite de B_n, tenemos:

- Si la integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, ya que esta se puede escribir como:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} B_n + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

- Si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, entonces la integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, ya que esta se puede escribir como:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \lim_{n\to+\infty} B_n$$

- Para la divergencia se razona de forma similar, ya que es la diferencia la que siempre converge, lo que no implica necesariamente que cada una de ellas converja siempre por separado.

Ejemplo 6.2.16 La siguiente serie es muy usada como serie de referencia para comparar y su comportamiento se obtiene como aplicación del criterio de la integral.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \qquad \text{es} \begin{cases} \text{convergente si} & p > 1 \\ \text{divergente si} & p \leq 1 \end{cases}$$

6.2.3. Series de términos alternados: criterio de Leibniz

Definición 6.2.17 Si a_n es positivo para cada n, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ se llama serie alternada.

Teorema 6.2.18 Si la sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente que converge a cero, entonces la serie alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge. Además, si S denota su suma y S_n es su enésima suma parcial, se tiene la desigualdad:

$$0 < (-1)^n (S - S_n) < a_{n+1}.$$

Demostración:

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots\ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1.$$

Por otra parte,

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{S_{2n}\}$ es una sucesión acotada creciente y por el teorema de las sucesiones monótonas, ella converge. Similarmente, $\{S_{2n-1}\}$, por ser una sucesión acotada decreciente, también es convergente. Estas sucesiones tienen el mismo límite, ya que

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \to 0.$$

La convergencia de las sumas parciales $\{S_n\}$ se sigue del hecho que , para cada n existe m tal que

$$S_{2m} < S_n < S_{2m+1}.$$

La desigualdad del enunciado se sigue de las dos desigualdades siguientes:

$$(-1)^n(S - S_n) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}a_{n+k} = \sum_{k=1}^{+\infty}(a_{n+2k-1} - a_{n+2k}) > 0.$$

$$(-1)^n(S - S_n) = a_{n+1} - \sum_{k=1}^{+\infty}(a_{n+2k} - a_{n+2k-1}) < a_{n+1}. \blacksquare$$

Ejemplo 6.2.19

- La serie alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ es convergente como consecuencia del criterio de Leibniz.
  En cambio, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ es divergente, como caso particular del ejemplo 6.2.16.

- La serie alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ es convergente como consecuencia del criterio de Leibniz.
  En este caso, la serie de los valores absolutos $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ es convergente, como caso particular también del ejemplo 6.2.16.

6.2.4. Convergencia absoluta y condicional de series

Definición 6.2.20

- Sea $a_n \in \mathbb{R}$. Diremos que la serie de término general a_n **converge absolutamente** si la serie de término general $|a_n|$ converge.
- Si una serie converge, pero no así la serie de sus valores absolutos, diremos que es ta es **condicionalmente convergente**.

Ejemplo 6.2.21 La siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \qquad \text{es} \begin{cases} \text{absolutamente convergente si} & p > 1 \\ \text{condicionalmente convergente} & 0 < p \leq 1 \end{cases}$$

Observación 6.2.22

1. Si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
2. Es claro que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es una reordenación de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es absolutamente convergente. $\Big[\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ se dice una **reordenación** de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si existe aplicación biyectiva $\varphi : \mathbb{N}u\{0\} \to \mathbb{N}\{0\}$ tal que $b_n = a_{\varphi(n)}\Big]$

Criterios para convergencia condicional Los criterios para la convergencia absoluta son los mismos que vimos para la convergencia de series de términos positivos. A seguir estableceremos algunos criterios para la convergencia condicional.

Suponemos ahora que $f \cdot \mathbb{N} \to (0, \infty)$ es una función monótona decreciente (i.e.) $n < m$ implica que $f(n) \geq f(m)$) y sea $f(n) = b_n$. Sea $g \cdot \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función acotada y $g(n) = A_n$.

Teorema 6.2.23 La serie $\sum_{b=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ es absolutamente convergente.

En efecto,

$$\sum_{n=1}^{P} |A_n(b_n - b_{n+1})| \leq \sum_{n=1}^{P} K|b_n - b_{n+1}| =$$

$$= K \cdot (b_1 - b_2) + K(b_2 - b_3) + \cdots + K(b_p - b_{p+1}) =$$

$$= K(b_1 - b_{p+1}) \leq K b_1.$$

Esto es, la sucesión de sumas parciales $S_p = \sum_{n=1}^{P} |A_n(b_n - b_{n+1})|$ es acotada. Como se trata de una serie de términos positivos debe ser convergente.

Teorema 6.2.24 Criterio de Abel: Sea (b_n) una sucesión positiva, monótona decreciente y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente. Se cumple que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n$ es convergente.

Demostración:

En efecto; consideramos a las sumas parciales

$$C_p = \sum_{n=1}^{P} b_n a_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p =$$

$$= A_1 b_1 + (A_2 - A_1) b_2 + \cdots + (A_p - A_{p-1}) b_p$$

donde $A_J = \sum_{n=1}^{J} a_n$ es una sucesión acotada.

Así :

$$C_p = A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \cdots + A_{p-1}(b_{p-1} - b_p) + A_p b_p$$

i.e.

$$C_p - A_p b_p = \sum_{n=1}^{p-1} A_n(b_n - b_{n+1}).$$

El resultado anterior asegura que la serie del lado derecho es convergente. Como $\lim_{p\to\infty} A_p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\lim_{p\to\infty} b_p = b \geq 0$ se tiene que la sucesión de sumas parciales, $(C_p)_{p\in\mathbb{N}}$, es una sucesión convergente. ■

Teorema 6.2.25 Criterio de Dirichlet Sea $\{b_n\}$ una sucesión de términos positivos, monótona decreciente y tal que $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie cuyas sumas parciales están acotadas y que no es necesariamente convergente.

Entonces la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ es convergente.

Ejemplo 6.2.26 Sea $a_n = (-1)^n$. en este caso $A_J = 1$ ó 0 Así que para cualquier sucesión positiva, monótona decreciente b_n con límite igual a cero se cumple que $-b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \cdots$, es convergente. En particular, para todo $\alpha > 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \in \mathbb{R}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(1+n)} \in \mathbb{R}.$

Observación 6.2.27 La importancia de la convergencia absoluta y su gran diferencia con la convergencia condicional es mucho más profunda de lo que podríamos pensar en primera instancia. La convergencia absoluta de una serie implica la convergencia a la misma suma de cualquier arreglo entre los términos de la serie. Si la serie sólo converge condicionalmente, siempre existe un arreglo de sus términos de modo que la suma del arreglo converge a un número dado a priori. Esto lo establece el **teorema de Riemann**, cuya inclusión en este texto es sólo con fines de cultura matemática.

Teorema 6.2.28 Teorema de Riemann Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie condicionalmente convergente. Dado $\Gamma \in \mathbb{R}$ existe $\varphi \cdot \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva tal que si $d_n = a_{\varphi(n)}$ entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = \Gamma.$$

Demostración:

Definamos las sucesiones b_n y c_n por: $b_n = a_n$si $a_n \geq 0$ y $b_n = 0$, en otro caso, $c_n = 0$ si$a_n \leq 0$ y $c_n = 0$, en otra situación.

Tenemos que $a_n = b_n + c_n$ y $|a_n| = b_n - c_n$. Denotemos por A_n^* , B_n y C_n la enésima suma parcial de la serie de término general $|a_n|, b_n$y c_n, respectivamente.

Claro que $B_n = \dfrac{1}{2}(A_n + A_n^*)$ y $C_n = \dfrac{1}{2}(A_n - A_n^*)$.

De acuerdo a nuestra hipótesis A_n converge hacia un número y A_n^* crece hacia infinito, luego debe ser que $\sum b_n$ y $\sum c_n$ son series divergentes(caso contrario A_n^*debería tener límite).

Formemos ahora la serie, $\sum w_n$, de la siguiente forma :Se definen $w_1, w_2, \cdots, w_{n_1}$ con la propiedad de que $w_i = b_i$ para $i = 1, 2, \cdots, n_1$, donde $n_1$es el primer índice para el cual $\sum_{i=1}^{i=n_1-1} b_i \leq \Gamma \leq \sum_{i=1}^{i=n_1} b_i$. Enseguida, definimos $w_{n_1+i} = c_i$ para $i = 1, 2, \cdots n_2$ donde n_2 es el primer índice para el cual se cumple$\sum_{i=1}^{i=n_1+n_2} w_i \leq \Gamma \leq \sum_{i=1}^{i=n_1+n_2-1} w_i$. Luego, definimos $w_{n_1+n_2+i} = b_{n_1+i}$ para $i = 1, 2, \cdots n_3$ donde n_3 es el primer índice para el cual se cumple$\sum_{i=1}^{i=n_1+n_2+n_3-1} w_i \leq \Gamma \leq \sum_{i=1}^{i=n_1+n_2+n_3} w_i$, y así sucesivamente.

Sea $W_n = \sum_{i=1}^{i=n} w_i$, la enésima suma parcial de la serie. Se cumplen las siguientes propiedades : $\Gamma \leq W_{n_1}$, $W_{n_1+n_2} \leq \Gamma$, $\Gamma \leq W_{n_1+n_2+n_3}, \cdots$. Además, claramente, se cumple que: $|W_{n_1} - \Gamma| \leq |w_{n_1}|, |W_{n_1+n_2} - \gamma| \leq |w_{n_1+n_2}|, |W_{n_1+n_2+n_3} - \Gamma| \leq |w_{n_1+n_2+n_3}|$ y, sucesivamente $|W_{n_1+n_2+n_3+\cdots+n_i} - \Gamma| \leq |w_{n_1+n_2+n_3+\cdots+n_i}|$. Observamos que entre un índice n_i y n_{i+1} se tiene $|W_{n_1+n_2+n_3+\cdots+n_i} - \Gamma| \leq |W_{n_1+\cdots+n_i+j} - \Gamma| \leq |W_{n_1+n_2+n_3+\cdots+n_{i+1}} - \Gamma|$, para cada j con esta propiedad. Por lo tanto, tenemos que $\lim_{n\to\infty} W_n = \Gamma$.

Como la serie, $\sum w_n$, contiene los términos de $\sum a_n$ y ceros, concluimos que constituyen una reordenación de a_n y, en consecuencia, tenemos el resultado anunciado. ■

6.2.5. Multiplicación de series de términos no-negativos

Sean $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ dos series cualesquiera. Si quisieramos hacer una multiplicación del tipo $(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k)(b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_p)$, procederíamos de la siguiente forma :

$$\begin{aligned}
&(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k)(b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_p) = \\
&= a_0b_0 + a_0b_1 + a_0b_2 + \ldots + a_0b_p + a_1b_0 + \ldots + a_1b_p + \ldots a_kb_0 + \ldots + a_kb_p \\
&= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \ldots + (a_{k-1}b_p + a_kb_{p-1}) + a_kb_p
\end{aligned}$$

Esto inspira la siguiente definición.

Definición 6.2.29 Llamaremos **serie producto** de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ a la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, cuyo término general c_n está definido por la ecuación:

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0 = \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}$$

Teorema 6.2.30 Si $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \beta$ entonces $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \alpha\beta$.

Demostración: Consideremos el siguiente cuadro:

$$\begin{array}{lllll}
a_0b_0 & a_1b_0 & a_2b_0 & a_3b_0 & a_4b_0 \ldots \\
a_0b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & a_4b_1 \ldots \\
a_0b_2 & a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & a_4b_2 \ldots \\
a_0b_3 & a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_4b_3 \ldots
\end{array}$$

Sea d_n la suma de todos los términos ubicados en el énesimo cuadrado y no los que son parte del cuadrado $(n-1)$.

$$\begin{aligned}
&d_0 = a_0b_0,\ d_1 = a_0b_1 + a_1b_1 + a_1b_0, \\
&d_2 = a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_2b_0
\end{aligned}$$

Observamos que :

$$\begin{aligned}
d_0 &= A_0B_0 \\
d_1 &= (a_0+a_1)(b_0+b_1) - a_0b_0 = A_1B_1 - A_0B_0 \\
d_2 &= (a_0+a_1+a_2)(b_0+b_1) - A_1B_1 = A_2B_2 - A_1B_1 \\
&\vdots \\
d_n &= A_nB_n - A_{n-1}B_{n-1}
\end{aligned}$$

Haciendo la suma

$$d_0 + d_1 + \ldots d_n = A_nB_n$$

puesto que $A_n \to \alpha,\ B_n \to \beta$ entonces $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} d_n = \alpha\beta$ ■

6.2.6. Multiplicación de series en general

Consideremos las series $\sum a_n$, $\sum b_n$ dadas por $a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = 0$, $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\log(n)}$, $n \geq 2$ sea $d_n = \frac{1}{\log(n)}$, claro que $d_2 \geq d_3 \geq d_4 \geq \ldots$, es decir, (d_n) es monótona decreciente con limite cero.

Para $c_n = (-1)^n$ la suma parcial$c_k = \displaystyle\sum_{j=2}^{k} c_j$ esta acotada y luego, por el criterio de Dirichlet, la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} c_nd_n$ es convergente, es decir,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n)} = \sum_{n\geq 2} a_n = \sum_{n\geq 2} b_n \in \mathbb{R}$$

Vamos a considerar ahora la serie producto $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{\infty} c_n$, definida a partir de las series dadas.

$$\begin{aligned}
c_n &= a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \ldots + a_{n-2}b_2 + a_{n-1}b_2 + a_{n-1}b_1 + a_nb_0 \\
&= \frac{(-1)^2}{\log(2)}\frac{(-1)^{n-2}}{\log(n-2)} + \frac{(-1)^3}{\log(3)}\frac{(-1)^{n-3}}{\log(n-3)} + \ldots + \frac{(-1)^{n-2}}{\log(n-2)}\frac{(-1)^2}{\log(2)} \\
&= (-1)^n\left[\frac{1}{\log(2)\log(n-2)} + \frac{1}{\log(3)\log(n-3)} + \ldots + \frac{1}{\log(n-3)\log(3)} + \frac{1}{\log(2)\log(n-2)}\right]
\end{aligned}$$

De forma que si n es par

$$c_n \geq \frac{n-3}{(\log(\frac{n}{2}))^2} \to \infty$$

y si n es impar, entonces

$$c_n \leq -\frac{n-3}{[\log(\frac{1}{2}(n-1))][\log(\frac{1}{2}(n+1))]} \to -\infty$$

Por lo tanto concluimos que la serie producto no converge, a pesar de que cada una de las series es convergente.

Así la convergencia de $\sum a_n$ y $\sum b_n$ no garantiza la convergencia de $\sum c_n$. Como vimos, en la sección anterior, la limitación $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$ garantiza la convergencia de la serie producto.

Teorema 6.2.31 Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen absolutamente hacia α y β entonces $\sum c_n$ convergen absolutamente hacia $\alpha\beta$.

Demostración: Al igual que antes la suma

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_2b_0) + \dots$$

converge hacia el producto $\alpha\beta$.

Por otro lado como $\sum |a_n|$ y $\sum |b_n|$ convergen, se tiene que

$$|a_0b_0| + (|a_0b_1| + |a_1b_1| + |a_1b_0|) + (|a_0b_2| + |a_1b_2| + |a_2b_2| + |a_2b_1| + |a_2b_0|) + \dots$$

es convergente

Sean

$$\begin{aligned}
\overline{d_0} &= |a_0b_0| \\
\overline{d_1} &= |a_0b_1| + |a_1b_1| + |a_1b_0| \\
\overline{d_2} &= |a_0b_2| + |a_1b_2| + |a_2b_2| + |a_2b_1| + |a_2b_0| \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Claro que $|d_i| \leq \overline{d_i}$.

Por lo tanto $\sum |d_i| \leq \sum \overline{d_i} \in \mathbb{R}$.

Así que $\sum d_i$ es absolutamente convergente (y luego $\sum d_i$ converge), es decir,

1. $a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_2b_0) + \dots$ converge absolutamente y luego

2. $a_0b_0+a_0b_1+a_1b_1+a_1b_0+a_0b_2+a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1+a_2b_0+\dots$ converge absolutamente.

   Sea σ esta suma. Como la expresión en (2) se obtiene de la expresión en (1) eliminando paréntesis tenemos $\sigma = \alpha\beta$.

Por otro lado
$$|c_n| \leq |a_0 b_n| + |a_1 b_{n-1}| + \ldots + |a_n b_0|$$
y luego
$$\sum |c_n| \leq \overline{d_0} + \overline{d_1} + \overline{d_2} + \ldots \in \mathbb{R}$$
Por lo tanto $\sum c_n$ es absolutamente convergente. ■

Ejemplo 6.2.32 Sea z un numero complejo y $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ probamos que $e^z \cdot e^\xi = e^{(z+\xi)}$, en efecto:

(a) Las series e^z y e^ξ son absolutamente convergentes ya que
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}$$

(b)
$$\begin{aligned} e^z \cdot e^\xi &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n-1}\xi}{(n-1)!1!} + \frac{z^{n-2}\xi^2}{(n-2)!2!} + \ldots + \frac{\xi^n}{n!}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[z^n + \binom{n}{1} z^{n-1}\xi + \binom{n}{2} z^{n-2}\xi^2 + \ldots + \xi^n\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+\xi)^n \\ &= e^{z+\xi} \end{aligned}$$

Teorema 6.2.33 Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen a α y β y si $\sum c_n$ converge a γ entonces $\gamma = \alpha\beta$.

Ejemplo 6.2.34 (a) Sea $\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ con $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \in \mathbb{R}$. En este caso $\alpha(x) \in \mathbb{R}$ y $\beta(x) \in \mathbb{R}$ para $|x| < 1$. Como $\sum |c_n| \in \mathbb{R}$ entonces $c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \in \mathbb{R}$ para $|x| < 1$ y claro que $c(x) = \alpha(x)\beta(x)$. Para $x \to 1$, $c(1) = \gamma = \alpha\beta$.

(b) Probar que
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{\frac{1}{(n-1)\cdot 1} + \frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{1}{1\cdot(n+1)}\right\} = (\log(2))^2$$

Solución: $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1},\ n \geq 0$

$$\sum a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \log(2)$$
$$\sum b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \log(2)$$

$$c_n = (-1)^n \left\{ \frac{1}{(n-1)\cdot 1} + \frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{1}{1\cdot(n+1)} \right\}$$

Para n par

$$\begin{aligned} c_n &\leq 2\left\{ \frac{1}{(n+1)\cdot 1} + \frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{1}{(\frac{1}{2}n+1)^2} \right\} \\ &= \int_1^{\frac{1}{2}n+1} \frac{dx}{x(n+2-x)} + \sigma\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{2}{n+2} \int_1^{\frac{1}{2}n+1} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{n+2-x}\right] dx + \sigma\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{2}{n+2} \log(n+1) + \sigma\Big(\frac{1}{n}\Big) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$c_n \leq \sigma(1) = K = \text{constante}$$

Análogamente para n impar $c_n = \sigma(1) \leq K$.
Sea $d_n = |c_n|$ entonces $d_{n-1} \geq d_n$

$$\begin{aligned} |c_{n-1}| - |c_n| &= \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1)\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n+1)\cdot 1} - \frac{1}{n-2} - \ldots - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] + \ldots + \frac{1}{1}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] - \frac{1}{n+1} \\ &\geq \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n+1} = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$|c_{n-1}| \geq |c_n|$$

Como $|c_n|$ es monótona decreciente, positiva y con límite cero, entonces

$$\begin{array}{rl} & |c_1| - |c_2| + |c_3| - |c_4| + \dots \\ \text{o} & -|c_1| + |c_2| - |c_3| + |c_4| - \dots \end{array}$$

convergen, esto es $\sum c_n \in \mathbb{R}$ por lo tanto

$$\sum c_n = \alpha\beta = (\log(2))^2$$

6.2.7. Criterios más específicos

Teorema 6.2.35 Criterio de Kummer: Supongamos que $b_n > 0\,, a_n > 0$ y que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$ $\quad$ (*i.e.* $\forall A \in \mathbb{R}^+ \, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=0}^{N} b_j \geq A$). Sea

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right).$$

Si $\alpha > 0$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge y si $\alpha < 0$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración: Supongamos que $\alpha > 0$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica que $\left(\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > \frac{\alpha}{3}$. Multiplicando por a_{n+1}y dividiendo por$\frac{\alpha}{3}$, tenemos

$$a_{n+1} < \frac{3}{\alpha} \left[\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right],$$

luego $\sum_{j=N+1}^{N+p+1} a_j \leq \frac{3}{\alpha} \sum_{j=N}^{j=N+p} \left[\frac{a_j}{b_j} - \frac{a_{j+1}}{b_{j+1}} \right] = \frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{N+p+1}}{b_{N+p+1}}$. Así la suma,$\sum_{j=N+1}^{N+p+1} a_j$, es acotada y como es creciente, tienen límite, que es lo que deseabamos probar.■

Observación 6.2.36

- El criterio de la razón es un caso particular del criterio del Kummer cuando $b_n = 1, n \in \mathbb{N}$.
- La forma general del criterio de Kummer es la siguiente: Sean

$$\alpha = \frac{\lim}{n\to\infty} \left(\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) \quad \text{y}$$

$$\beta = \overline{\lim_{n} \to \infty} \left(\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right)$$

Si $\alpha > 0$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente y si $\beta < 0$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es divergente.

Un caso particular del criterio de Kummer es el siguiente teorema.

Teorema 6.2.37 Criterio de Raabe Supongamos que $a_n > 0$ y

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\sigma}{n} + F(n); \quad \text{con} \quad \lim_{n\to\infty} n \cdot F(n) = 0.$$

Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si $\sigma > 1$ y diverge si $\sigma < 1$. En efecto; basta considerar $b_n = \frac{1}{n}$ y aplicar el criterio de Kummer.

Ejemplo 6.2.38 Analizar la convergencia de la serie de término general

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \frac{1}{n}.$$

Solución: En este caso:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n+2)(n+1)}{(2n+1)n} = 1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{4n(n+1/2)}.$$

De acuerdo al criterio de Raabe (en este caso $\sigma = 3/2$)la serie converge. Observe que el criterio de la razón no da ninguna información.

Observación 6.2.39 El Criterio de Raabe no otorga ninguna información cuando $\sigma = 1$. Para avanzar un poco más en estos casos se tiene el Criterio de Gauss.

Teorema 6.2.40 Criterio de Gauss Sea $a_n > 0$ y $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{t_n}{n \cdot \ln n}$.

Si $\lim_{n\to+\infty} t_n > 1$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente y si ocurre que $\lim_{n\to\infty} t_n < 1$ entonces la serie es divergente.

Otra consecuencia del criterio de Raabe y del criterio de Gauss es:

Teorema 6.2.41 Si $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\sigma}{n} + F(n)$, donde $\lim_{n\to\infty} n^{1+\delta} F(n) = 0$, para algún $\delta > 0$ entonces la serie converge si $\sigma > 1$ y diverge si $\sigma \leq 1$.

El caso $\sigma \neq 1$, es consecuencia de Raabe y el caso $\sigma = 1$ es consecuencia de Gauss.

6.2.8. Series de Números Complejos

Sea $U:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ una sucesión de números complejos y $U(n)=U_n$. Aquí la expresión $||a+bi||$ es igual al número real $\sqrt{a^2+b^2}$.

Definición 6.2.42 Diremos que la sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge a** $U\in\mathbb{C}$ si $\forall\varepsilon>0\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $||U_n-U||<\varepsilon \quad \text{si} \quad n\geq n_0$

Si escribimos $U_n=a_n+ib_n, U=a+ib$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} U_n=U \ =a+ib \Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \lim_{n\to\infty} a_n \ =a & \text{y} \\ \lim_{n\to\infty} b_n \ =b. & \end{array}$$

La **enésima suma parcial** de la serie

$\displaystyle\sum_{K=1}^{\infty} U_K$,se define como el número complejo $U_n=\displaystyle\sum_{K=1}^{n} U_K$

Diremos que la serie es **convergente** si ocurre que la sucesión de sumas parciales es convergente.

Este concepto nos indica que la convergencia de las series de números complejos depende de la convergencia de las series formados por la parte real e imaginaria de esos números. Esto es:

$$U_n=\sum_{k=1}^{n} U_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k+ib_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k+i\sum_{k=1}^{n} b_k.$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n \qquad =\sum_{k=1}^{\infty} U_n=U=a+ib \quad \text{si y solo si}$$

Así .

$$\lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{j=0}^{j=n} a_j \ =a \text{ y } \lim_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k=b$$

Ejercicios resueltos

1. Calcule las siguientes sumas, si es que existen. Si no existen justifique por qué.

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n$

Solución: La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge para $|r| < 1$ y $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{5}{9}} = \frac{9}{9-5} = \frac{9}{4}.$$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n$

Solución: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{9}\right) - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}.$

c) $\sum_{n=5}^{+\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n$

Solución:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{9}\right) - \left(1 + \frac{5}{9} + \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \left(\frac{5}{9}\right)^3 + \left(\frac{5}{9}\right)^4\right) \\
&= \frac{1}{1-\frac{5}{9}} - \left[\frac{1-\left(\frac{5}{9}\right)^5}{1-\frac{5}{9}}\right] = \frac{1}{1-\frac{5}{9}} - \frac{1}{1-\frac{5}{9}} + \frac{\left(\frac{5}{9}\right)^5}{1-\frac{5}{9}} \\
&= \frac{\left(\frac{5}{9}\right)^5}{1-\frac{5}{9}} = \frac{\frac{5^5}{9^4}}{4} = \frac{5^5}{4\cdot 9^4}.
\end{aligned}$$

d) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{5}{9}\right)^n$

Solución: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{9}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{5}{9}\right)} = \frac{9}{14}.$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{5}{9}\right)^n$

Solución: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{9}\right)^n - 1 = \frac{9}{14} - 1 = -\frac{5}{14}.$

f) $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{5}{9}\right)^n$

Solución:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=5}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5}{9}\right)^n &= \sum_{n=5}^{\infty}\left(-\frac{5}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{9}\right)^n - \left[1-\frac{5}{9}+\left(\frac{5}{9}\right)^2-\left(\frac{5}{9}\right)^3+\left(\frac{5}{9}\right)\right]^4 \\
&= \frac{1}{1-\left(-\frac{5}{9}\right)} - \left[\frac{1-\left(-\frac{5}{9}\right)^5}{1-\left(-\frac{5}{9}\right)}\right] = \frac{1}{1+\frac{5}{9}} - \frac{1}{1+\frac{5}{9}} - \frac{\left(\frac{5}{9}\right)^5}{1+\frac{5}{9}} \\
&= -\frac{\frac{5^5}{9^4}}{14} = -\frac{5^5}{14\cdot 94}.
\end{aligned}$$

2. Verifique que el número decimal $0,9999\ldots\ldots$, con infinitos decimales iguales a 9 es 1.

Solución:

$$\begin{aligned}
0,99999\cdots &= 0,9+0,09+0009+\cdots \\
&= 9\cdot 0,1+9\cdot 0,01+9\cdot 0,001+9\cdot 0,0001+\cdots \\
&= 9[0,1+0,01+0,001+0,0001+\cdots] \\
&= 9\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots\right) = 9\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n\right) \\
&= 9\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n - 1\right) = 9\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = 9\left(\frac{10}{9}-1\right) = 9\cdot\frac{1}{9} = 1.
\end{aligned}$$

3. Generalice el ejercicio anterior para demostrar que el número:

$$[x], 9999\ldots\ldots = [x]+1.$$

Solución: Usando el resultado anterior, tenemos: $[x], 999\cdots = [x] + 0,9999\cdots = [x] + 1$.

4. Calcule las sumas parciales de las siguientes series y demuestre que:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\arctan n - \arctan(n-1)) = \frac{\pi}{2}$.

   Solución: Esta es una serie telescópica, así:

$$\begin{aligned}
v_k &= \sum_{n=1}^{k} (\arctan - \arctan(n-1)) \\
&= (\arctan 1 - \arctan 0) + (\arctan 2 - \arctan 1) + \cdots \\
&\\
&+ (\arctan k - \arctan k - 1) \\
&= \arctan k - \arctan 0 = \arctan k.
\end{aligned}$$

   Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\arctan n - \arctan(n-1)) = \lim_{k\to+\infty} v_k = \lim_{k\to+\infty} \arctan k = \pi/2.$$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(ne^{-nx^2} - (n-1)e^{-(n-1)x^2} \right) =$
   $\begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   Solución:

   - Si $x \neq 0$:

$$\sum_{n=1}^{k} (ne^{-nx^2} - (n-1)e^{-(n-1)x^2}) = ke^{-kx^2}$$

     Como

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k}{e^{kx^2}} = 0.$$

     Entonces, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (ne^{-nx^2} - (n-1)e^{-(n-1)x^2}) = 0$

- Si $x = 0$, tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{k}(n-(n-1)) = \sum_{n=1}^{k} 1 = k.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}(n-(n-1)) = +\infty.$$

5. Use el **criterio de la integral** para demostrar que las siguientes series convergen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$

Solución: Sea $a_n = \dfrac{1}{1+n^2}$ y $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, x \geq 0$, entonces $f(n) = a_n$ y f es monótona decreciente. El criterio de la integral asegura que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(t)dt$ converge .

$$\int_1^n f(t)dt = \int_1^n \frac{dt}{1+t^2} = (\arctan t)_1^n = \arctan n - \arctan 1.$$

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} arctann = \frac{\pi}{2}$ entonces, $\displaystyle\int_1^{\infty} f(t)dt = \frac{\pi}{2} - 1.$

Como el criterio de la integral establece que si

$s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ y $I_n = \displaystyle\int_1^n f(t)dt$ entonces, $0 \leq s_n - I_n \leq a_1$. Se cumple que

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n - \int_1^{\infty} f(t)dt \leq a_1.$$

Esto nos permite obetener una acotación para la suma de la serie:

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Esto es:

$$\frac{\pi}{2} - 1 \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \le \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}.$$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^4+1}$

Solución: Sean $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Es inmediato que : $f(x) \le g(x)$, para todo $x \ge 1$. Luego,

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \le \int^{+\infty} g(x)dx.$$

Luego, por criterio de comparacion la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente. De esta forma, aplicando el criterio de la integral, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^4} \quad \text{es convergente.}$$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}.$

Solución: Sea $f(x) = xe^{-x^2}$. para aplicar el criterio de la integral debemos demostrar que f es monotóna decreciente y positiva para $x \ge 1$. En efecto,

$$f'(x) = e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(1-2x^2).$$

El signo de f' es el signo de $(1-2x^2)$. en particular, f' es negativa para $x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Analicemos ahora la convergencia de la integral. Si $u = -x^2$, entonces $du = -2xdx$, entonces:

$$\begin{aligned}\int_1^n xe^{-x^2}dx &= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{-n^2} e^u du = -\frac{1}{2}e^u\Big|_{-1}^{-n^2} \\ &= -\frac{1}{2}(e^{-n^2} - e^{-1}) = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-n^2}).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}e^{-1}$.
Por lo tanto, la integral converge.

6. Use el **criterio de la integral** para demostrar que las siguientes series divergen.

   a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1}$

   Solución: Sea $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. se deja como ejercicio verificar que esta función es positiva y monótona decreciente para $x \geq 1$. Para analizar la convergencia de la integral, hacemos el cambio de variable:

   $$u = x^2 + 1\ ,\ du = 2xdx.$$

   $$\begin{aligned}\int_1^n \frac{x}{x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int_2^{1+n^2}\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u\Big|_2^{1+n^2}\\ &= \frac{1}{2}[\ln(1+n^2) - \ln 2].\end{aligned}$$

   Así, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n \frac{x}{1+x^2}dx = +\infty$.Por lo tanto la serie dada diverge, es decir:

   $$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{n}{r^2+1} = +\infty.$$

   b) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$

   Solución: Sea $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$. se deja al estudiante el trabajo de verificar que f satisface las hipótesis del criterio de la integral. Usando el cambio de variable $u = \ln x, du = \frac{dx}{x}$.

   $$\int_2^n \frac{dx}{x\ln x} = \int_{\ln 2}^{\ln n}\frac{du}{u} = \ln u\Big|_{\ln 2}^{\ln n} = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2).$$

   Entonces,

   $$\lim_{n\to+\infty}\int_2^n \frac{dx}{x\ln x} = +\infty.$$

Lo que implica que la serie diverge, es decir: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}=+\infty.$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+\sqrt{n})}.$

Solución: Sean $f(x)=(1+\sqrt{x})^{-1}$, $g(x)=(1+x)^{-1}$. Es inmediato que $g(x)\leq f(x)$.

$$\int_1^n\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_1^n=\ln(1+n)+\ln(2).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{dx}{1+x}=+\infty.$$

Así,

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=+\infty.$$

Luego, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}}$ diverge.

7. Use el **criterio de comparación** para demostrar que las siguientes series convergen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}.$

Solución: Como $n^2\leq 1+n^2$ entonces, $\dfrac{1}{1+n^2}\leq\dfrac{1}{n^2}.$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es una serie convergente, tiene que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}\in\mathbb{R}.$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$

Solución: Para todo $n\geq 1$,
$\dfrac{1}{n^n}\leq\dfrac{1}{n^2}$. Por lo tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}\in\mathbb{R}.$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{ne^{-n}}{n^2+1}.$

Solución: Como $\dfrac{ne^{-n^2}}{n^2+1} \leq ne^{-n^2}$ y, en virtud del ejercicio resuelto $5d$ sabemos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ es convergente. Por lo tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-n^2}}{1+n^2} \in \mathbb{R}$.

8. Use el **criterio de comparación** para demostrar que las siguientes series divergen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Solución: Para todo $n \geq 1$, $\sqrt{n} \geq 1$. Luego, $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1} \geq \dfrac{1}{n+1}$.
Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} dis\frac{1}{n+1}$ es divergente, se tiene que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = +\infty$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n+1}$.

Solución: $\dfrac{1}{3n+1} = \dfrac{1}{3(n+1/3)}$ implica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3(n+1/3)} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1/3}.$$

Como $n+1/3 \leq n+1$ se tiene $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1/3}$.

Usando que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$, concluimos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1/3} = +\infty$.

9. Use el **criterio de comparación al límite** para demostrar que las siguientes series convergen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 \exp(-2n)}{n^2+1}$

Solución: Sea $a_n = \exp(-2n)$. Entonces la siguiente es una serie geométrica convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-2})^n = \frac{1}{1-e^{-2}} - 1 = \frac{1}{e^2-1}.$$

Sea $b_n = \dfrac{n^2}{1+n^2}a_n$ entonces, $\dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{n^2}{1+n^2}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{1+n^2} = 1$.
Luego, por comparación al límite,
, $dis\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{(n^2+1)^{3/2}}$

Solución: Consideremos $a_n = \dfrac{4}{n^3}$ y $b_n\dfrac{1}{(1+1/n^2)^{2/2}}$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{4}{n^3(1+n^{-2})^{3/2}} = \frac{4}{(n^2)^{3/2}(1+n^{-2})^{3/2}}\\
&= \frac{4}{(n^2(1+n^{-2}))^{3/2}} = \frac{4}{(n^2+1)^{3/2}}.\\
\frac{b_n}{a_n} &= \frac{1}{(1+1/n^2)^{3/2}}\\
&\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = 1.
\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^3}\in\mathbb{R}$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n\in\mathbb{R}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{n(n^2-3)^{3/2}}$.

Solución: Sea $a_n = \dfrac{1}{(n^2-3)^{3/2}} = \dfrac{1}{(n^2)^{3/2}(1-3/n^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{n^3(1-3/n^2)^{3/2}}$.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\in\mathbb{R}$.

Sea $b_n = a_n\cdot\dfrac{2n+1}{n}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n} = 2$ se tiene que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n\in\mathbb{R}$.

10. Si $\lambda\geq 0$ y $a_n = \dfrac{1}{n^\lambda}$, analizar la convergencia de la serie de término general a_n.

Solución: Para esto consideramos la función $f(x) = (x)^{-\lambda}$, definida para $x\geq 1$. Esta función es monótona decreciente , no negativa y $f(n) = a_n$. Tenemos que

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}|_1^{\infty},$$

caso $\lambda \neq 1$ y la integral es igual a $\log|x|_1^\infty$, caso $\lambda = 1$. De acuerdo con el criterio de la integral concluimos que la serie es convergente si $\lambda > 1$ y divergente en otro caso.

11. Para $\lambda > 0$, analizar la convergencia de la serie de término general

$$a_n = \frac{1}{n \cdot (\log n)^\lambda}.$$

Solución: Sea $f(x) = x^{-1}(\log x)^{-\lambda}$. Para $\lambda \geq 0$ y $x > 1$ se cumple que f es integrable, monótona decreciente y no negativa.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\lambda} = \begin{cases} \log(\log x)|_{\log 2}^\infty & ,\lambda = 1 \\ \\ \dfrac{u^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}|_{\log 2}^\infty & ,0 \leq \lambda < 1, \lambda > 1; \end{cases} = \begin{cases} \infty & ,0 \leq \lambda < 1 \\ \\ \dfrac{(\log 2)^{1-\lambda}}{\lambda - 1} & ,\lambda > 1 \end{cases}$$

De esta forma, la serie de término general $a_n = \dfrac{1}{n(\log n)^\lambda}$ diverge para $0 \leq \lambda \leq 1$. y converge para $\lambda > 1$.

12. Para $\lambda < 0$, demuestre la divergencia de las series de términos generales :

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\lambda}$.
- $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n(\log(\log n))^\lambda}$.
- $\displaystyle\sum_{n=16}^{\infty} \frac{1}{n \log(n) \log(\log n)(\log(\log(\log n)))^\lambda}$.

Solución: En efecto; sea $a_n = \dfrac{1}{n \log n(\log(\log n))^\lambda}; b_n = \dfrac{1}{n \log n}$. Como $a_n \geq b_n$ por criterio de comparación tenemos que $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ diverge.

Sucesivamente se hacen comparaciones para probar la divergencia de estas series. Es posible probar(ejercicio) que estas series son convergentes para $\lambda > 1$ y son divergentes para $\lambda \leq 1$.

13. Analizar la convergencia de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+n^{-\lambda}).$$

Solución: Si $\lambda < 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \log(1+n^{-\lambda}) = \infty$ y la serie es divergente.

Para $\lambda \geq 0$; $\quad \lim_{n\to\infty} \dfrac{\log(1+n^{-\lambda})}{n^{-\lambda}} = \lim\limits_{n\to\infty} \log\left(1+n^{-\lambda}\right)^{\frac{1}{n^{-\lambda}}} = 1$.

Así, $a_n = \log(1+n^{-\lambda})$ y $b_n = n^{-\lambda}$ son comparable.

Concluimos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+n^{-\lambda})$ diverge para $\lambda \leq 1$ y converge para $\lambda > 1$.

14. Sean α, β y γ números reales positivos, analizar la convergencia de la serie.
$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma\cdot(\gamma+1)} + \cdots .$$

Solución: En este caso se tiene : $a_0 = 1, a_1 = \dfrac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}$,

$$a_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}, \cdots, a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)-(\beta+n-1)}{1\cdot 1\cdots n\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}.$$

Así,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdots n\gamma(\gamma+1)\cdots(\alpha+n-1)} \cdots \frac{1\cdot 2\cdots(n+1)\gamma(\gamma++1)\cdots(\gamma+n)}{\alpha\cdots(\alpha+n)\beta\cdots(\beta+n)} =$$
$$= \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{n^2+(\gamma+1)n+\gamma}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta} =$$
$$= \frac{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta} + \frac{(\gamma+1-(\alpha+\beta))n}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta} + \frac{\gamma-\alpha\cdot\beta}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}$$

Sea $F(n) = \dfrac{\gamma-\alpha\cdot\beta}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}$. Es claro que $\lim_{n\to\infty} n^{1+\delta}F(n) = 0$ para $0 < \delta < 1$ así que usando el colorario al criterio de Gauss tenemos que si $\gamma - (\alpha+\beta) \leq 0$ entonces la serie es divergente (i.e. si $\gamma \leq \alpha+\beta$). Si la relación $\gamma - (\alpha+\beta) > 0$ se cumple entonces la serie es convergente (i.e. sí $\gamma > \alpha+\beta$).

Ejercicios propuestos

1. Calcule las siguientes sumas, si es que existen. Si no existen justifique por qué.

    a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{9}{5}\right)^n$

    b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{9}{5}\right)^n$

    c) $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty}\left(\frac{9}{5}\right)^n$

    d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{9}{5}\right)^n$

    e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{9}{5}\right)^n$

    f) $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{9}{5}\right)^n$

2. Calcule las sumas parciales de las siguientes series y demuestre que:

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$
    Indicación: Use fracciones parciales.

    b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}=\frac{7}{36}$
    Indicación: Use fracciones parciales.

3. Use el **criterio de la integral** para demostrar que las siguientes series convergen.

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{-n^2}$

    b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

    c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n^2+4)^2}$

4. Use el **criterio de la integral** para demostrar que las siguientes series divergen.

   a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+3}{(n+1)(n+2)}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{n})}$.

5. Use el **criterio de comparación** para demostrar que las siguientes series convergen.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(n^2+1)^{3/2}}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^2}$.

6. Use el **criterio de comparación** para demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ diverge.

7. Use el **criterio de comparación al límite** para demostrar que las siguientes series convergen.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)^{1/2}}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(8n^2+1)^{2/3}}$.

8. Un corolario útil del criterio de comparación al límite es el siguiente teorema que se suele llamar **criterio polinomial**:
   Si $P(n)$ es un polinomio de grado p y $Q(n)$ es un polinomio de grado q, la serie

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n))}$$

   - Converge si $q > p+1$.
   - Diverge si $q \leq p+1$.

a) Demuestre el criterio polinomial

b) Use el criterio polinomial para analizar la convergencia de las siguientes series:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3+1}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7n^2-5n}{n^2+1}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n-1}{n^3+1}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+1}{(n^2-1)^3}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^2-1)^3}{n^3+1}$

9. Demuestre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots\frac{1}{n+n}\right)=\ln 2$. Para ello:

   a) Escriba $\displaystyle\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots\frac{1}{n+n}$ como una suma de Riemann de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en $[1,2]$.

   b) Justifique porqué dicha suma converge a $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

10. Usando el mismo razonamiento del ejercicio anterior demuestre que:
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\ldots\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\frac{\pi}{4}.$

11. Usando el mismo razonamiento de los ejercicios anteriores demuestre que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\,\mathrm{sen}\,\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

6.3. Series de potencias

6.3.1. Series de Funciones

Para $x \in \mathbb{R}$ consideremos la serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Esta serie puede converge para algunos valores de x y diverger para otros. En general, la convergencia se da en intervalos. Si la serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge para todo x en algún intervalo cerrado $[a, b]$, entonces se puede definir una función con dominio $[a, b]$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

En estos casos podemos deducir propiedades de la función f a partir de las propiedades de la serie o viceversa. A veces, al resolver ecuaciones diferenciales lineales usando series de potencias, surge el problema de estudiar propiedades de la función definida mediante una serie. Otras veces, dada una función f se quiere desarrollarla en serie, este es el caso de las series de Taylor y de Fourier.
Para el estudio de las propiedades de funciones definidas mediante series, es importante observar el tipo de convergencia.
En las series numéricas tenemos dos tipos de convergencia: convergencia absoluta y convergencia condicional o simple.
Para el caso de las series o sucesiones de funciones tenemos convergencia puntual o simple y convergencia uniforme. La convergencia puntual, es cuando la propiedad de ser convergente depende del “x”considerado.

Definición 6.3.1 Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función real. Diremos que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ **converge puntualmente o simplemente** a la función f si para cada $x \in [a, b]$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$, $N_0 = N_0(\varepsilon, x)$, tal que
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para $n \geq n_0(\varepsilon, x)$.

Lo importante de esta definición es notar que el N_0 a partir del cual la definición de convergencia se realiza depende de ε y de x como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.3.2 Consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde cada $f_n : [0, 1] \to R$ está dada por $f_n(x) = x^n$. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, la función definida por $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ y $f(1) = 1$.

Demostraremos que la sucesión $\{f_n\}$, converge puntualmente a la función f.
Para ello debemos buscar un número natural N_0 tal que $|x^n| \leq \varepsilon$ si $n \geq N_0$, esto es,

$$n \log x \leq \log \varepsilon.$$

Despejando n tenemos que,

$$n \geq \frac{\log \varepsilon}{\log x}.$$

Así, si $n \geq \left[\dfrac{\log \varepsilon}{\log x}\right]$ = parte entera del número $\dfrac{\log \varepsilon}{\log x}$ entonces $|x^n| < \varepsilon$.
Observemos que, $N_0(\varepsilon, x) = \left[\dfrac{\log \varepsilon}{\log x}\right]$ depende claramente de ε y de x . Además, este N_0 vale para $x \neq 0$ y $x \neq 1$.
Para analizar la convergencia de la sucesión en $x = 1$, observemos que $f_n(1) = 1^n = 1$, para cualquier n.es decir es este caso tenemos la sucesión constante 1 , la cual es trivialmente convergente a 1.Por lo tanto, en este caso, $N_0(\varepsilon, 1) = 1$. De manera análoga, tenemos que para $x = 0$, la sucesión es la sucesión constante 0, entonces también podemos escoger $N_0(\varepsilon, 0) = 1$. En síntesis,

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)\,, \qquad \text{donde}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

Definición 6.3.3 Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función real. Diremos que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ **converge uniformemente** a la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$, $N_0 = N_0(\varepsilon)$, tal que
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para cada $n \geq N_0$ y $x \in [a, b]$.

Para la convergencia uniforme el N_0 depende solamente de ε y es el mismo para todo punto x, de ahí el nombre **uniforme**. De esto, podemos concluir que el concepto de convergencia uniforme es más fuerte que el de convergencia puntual. Así, tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} \text{convergencia uniforme} & \Longrightarrow & \text{convergencia puntual} \\ \text{convergencia puntual} & \not\Longrightarrow & \text{convergencia uniforme} \end{array}$$

Ejemplo 6.3.4 La sucesión de funciones del ejemplo 6.3.2 converge puntualmente, pero no uniformemente. La convergencia no puede ser uniforme ya que si $\varepsilon < 1/2$ entonces siempre existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_1$ implica $x^n > \varepsilon$ para algún $x \in]0, 1[$. En efecto, basta que se cumpla que $x^n \geq 1/2$ i.e. $n \log x \geq -\log 2$.

Las definiciones 6.3.1 y 6.3.3 pueden aplicarse a las series de funciones, procediendo como en el caso de las series numéricas , a considerar la sucesión de las sumas parciales de la serie.

Sea, $S_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ la sucesión de sumas parciales asociada a la serie de funciones de término general f_n. Esta sucesión está dada por : $S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$. Para cada n se tiene que S_n es una función de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$.

Definición 6.3.5 Diremos que la serie de funciones término general f_n **converge**

- **puntualmente** a la función $S(x)$ si la sucesión de sus sumas parciales converge puntualmente a $S(x)$.
- **uniformemente** a la función $S(x)$ si la sucesión de sus sumas parciales converge uniformemente a $S(x)$.

En ambos casos escribiremos $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x)$, especificando en palabras el tipo de convergencia.

Teorema 6.3.6 Criterio de Cauchy La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ es uniformemente convergente si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon)$ tal que $\left| \sum_{j=n+1}^{n+p} f_j(x) \right| < \varepsilon$ para cada $n \geq N(\varepsilon)$, cada $p \in \mathbb{N}$ y cada $x \in [a,b]$.

Un segundo criterio para la convergencia uniforme es

Teorema 6.3.7 Criterio de Weierstrass Si existe una serie numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ convergente, tal que

$$|f_n(x)| \leq M_n, \qquad \text{para todo} \qquad x \in [a,b], \qquad n \in \mathbb{N},$$

entonces la serie de funciones $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ es uniformemente y absolutamente convergente.

Ejemplo 6.3.8 La serie de término general $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^3}$ es uniformemente convergente para $|x| \leq 1$. En efecto,

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 6.3.9 1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ converge absoluta y uniformemente en $[a,b]$.

Pues, $\displaystyle\left|\frac{1}{n^2+x^2}\right| = \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}$, ya que $x^2 \geq 0$ y la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

2. $\displaystyle\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$ converge absoluta y uniformemente en $[a,b]$.

Como $\dfrac{\pi^2}{3}$ no depende de x, basta aplicar el criterio a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$ comparándola con $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Otros criterios para la convergencia uniforme son los siguientes:

Teorema 6.3.10 Supogamos que :

1. La sucesión de funciones $b_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisface:
   - Para cada $x \in [a,b]$ la sucesión $\{b_n(x)\}$ es monótona decreciente,
   - $b_n(x) \leq K$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [a,b]$.
2. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ es uniformemente convergente en $[a,b]$.

Entonces, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ es uniformemente convergente.

Ejemplo 6.3.11 Consideremos $b_n(x) = |x|^n, -1 \leq x \leq 1$ y $a_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n}$. La sucesión $b_n(x)$ satisface las hopótesis del teorema 6.3.10 y la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ es uniformemente convergente. Por lo tanto, podemos concluir que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ es uniformemente convergente para $-1 \leq x \leq 1$.

Teorema 6.3.12 Supongamos que :

1. la sucesión de funciones $b_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisface:
   - Para cada $x \in [a,b]$ la sucesión $\{b_n(x)\}$ es monótona decreciente,
   - La sucesión $\{b_n(x)\}$ converge uniformemente a la función nula en $[a,b]$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in [a,b]$ se cumple que $|\sum_{n=1}^{\infty} a_r(x)| \leq C$, para algún $C \in \mathbb{R}$

   entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$ converge uniformemente en $[a,b]$.

Ejemplo 6.3.13 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\log n+1}\right)^x \frac{x^n}{n^2}$ es uniformemente convergente en $[\theta,1]$. para cada $0 < \theta < 1$.

En efecto,

$$\left(\frac{1}{\log n+1}\right)^x \leq [\log(n+1)]^{-\theta},$$

para cada $\theta \in]0,1[$ y $x \in [\theta,1]$. Por lo tanto, es una sucesión monótona decreciente que converge a la función nula y se tiene

$$|\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n^2}| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leq C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

6.3.2. Propiedades de las series uniformemente convergentes

La convergencia uniforme tiene algunas propiedades que la hacen especialmente útil en el cálculo diferencial e integral. Estas son:

Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en $[a,b]$ a la función $f(x)$, entonces se tiene:

1. **Continuidad de la función suma**
   Si para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es continua en $x = x_0$ entonces. f es continua en $x = x_0$.
2. **Integración término a término**
   Si cada f_n es continua en $[a,b]$ y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$, entonces $: \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$ converge uniformemente al número $\int_a^b f(x)dx$.

3. **Diferenciación término a término**
   Si cada f_n tiene derivada continua en $[a,b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente en $[a,b]$, y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ entonces, f es derivable en x y $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$.

Ejemplo 6.3.14 Para $-1 < x < 1$ vamos a calcular el valor de la serie.

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8} + \cdots$$

Consideramos la serie

$$\log(1-x) + \log(1+x) + \log(1+x^2) + \log(1+x^4) + \cdots .$$

Su suma enésima es

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \log\Big((1-x)\cdot(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\Big) \\ &= \log\Big((1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}}\Big) \\ &= \log\left(1-x^{2^n}\right) \end{aligned}$$

Es inmediato que esta suma tiende a cero para $|x| < 1$.

Así, $\log(1+x^2)+\log(1+x^4)+\cdots$ converge uniformemente a $-\log(1-x)-\log(1+x)$. De acuerdo al resultado anterior la serie de derivadas de esta serie de logaritmos converge a la derivada de la función límite, es decir:

$$\frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \cdots = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}.$$

Concluimos entonces que

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + +\frac{4x^3}{1+x^4} + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

6.3.3. Series de potencias

Un caso especial de series de funciones es el que se obtiene al considerar las aplicaciones,

$$f_n(x) = a_n(x - x_0)^n,\ a_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ x_0 \in \mathbb{R}.$$

Aquí usaremos la convención $(x - x_0)^0 = 1$ y estudiaremos las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

en que algunos términos a_n pueden ser cero.

Con respecto a estas series surgen dos problemas fundamentales:

1. Si la serie converge para todos los x en algún intervalo, entonces podemos definir la función suma $S(x)$.
   En este caso, quisiéramos conocer las propiedades de esta función a partir de las propiedades de la serie.

2. También enfrentaremos el problema recíproco. Dada una función con ciertas propiedades , quisiéramos desarrollar la función en una serie de potencias de modo que ésta converja para algunos valores de x hacia la función dada.

Existen algunas funciones no elementales que se definen mediante series, como la función hipergeométrica y la función de Bessel.

Convergencia de una serie de potencias Una serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$$

tiene tres alternatias en cuanto a su convergencia:

1. Converge sólo para $x = x_0$.

2. Converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. Converge en algún intervalo simétrico en torno al punto $x = x_0$.

Teorema 6.3.15 Si la serie de potencias $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge en $x-x_0=b, b\neq 0$ la serie es absolutamente convergente para todo x en $|x-a|<|x_0|$ y converge uniformemente en $|x-x_0|\leq M|b|$, para todo M tal que $0<M<1$.

Demostración: Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge en $b=x-x_0$, entonces $a_n b^n \to 0$, cuando $n\to+\infty$.

Como la sucesión $\{a_n b^n\}$ es convergente, ella es acotada. Entonces, existe $M>0$ tal que

$$|a_n b^n| \leq M,$$

para cualquier x en el intervalo,

$$|x-x_0|<|b|.$$

Así, existe un r tal que,

$$\left|\frac{x-x_0}{b}\right| \leq r < 1$$

Usando criterio de comparación entre,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(x-x_0)^n| \text{ y } \sum_{n=0}^{+\infty} Mr^n \text{ que es una serie geométrica, tenemos}$$

$$|a_n(x-x_0)^n| = |a_n b^u| \cdot \left|\frac{x-x_0}{b}\right|^n \leq Mr^n.$$

Como $0<r<1$, la serie geométrica converge y por criterio de Weierstrass la convergencia de la serie de potencias es uniforme y absolutamente en el intervalo,

$$|z-x_0|\leq r|b|. \blacksquare$$

Observación 6.3.16 Si la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge al menos para un $x\neq x_0$, entonces para algun $b=x-x_0\neq 0$. Por el teorema anterior, existe al menos un intervalo abierto

$$|x-x_0|<|b|,$$

en el cual la serie converge absolutamente.
Es obvio, por criterio de comparación, que converge absolutamente para todos los x t.q.

$|x - x_0|$ es menor que $|x - c|$ si se sabe que $\sum a_n(x-c)^n$ es convergente.
Por lo tanto, podemos pensar en el supremo R de los números r que satisfacen la condición:

$$|x - x_0| < r \qquad \text{es absolutamente convergente.}$$

Obviamente, la serie diverge para los x tales que

$$|x - x_0| > R.$$

A este R, se le llama **radio de convergencia** de la serie de potencias.

Definición 6.3.17 Dada la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$,

- Se llama **radio de convergencia** de la serie al número R tal que

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

- Se llama **intervalo de convergencia** de la serie al intervalo centrado en x_0 y de radio R, es decir, al conjunto:

$$|x - x_0| < R.$$

Observación 6.3.18 La forma más fácil de calcular el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ es usando el criterio de la razón. Es decir:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|.$$

Alternativamente, se puede calcular el intervalo de convergencia calculando $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}|$ e imponiendo a esta expresión la condición de convergencia del criterio de la raíz. En los ejercicios resueltos se usará este método.

Teorema 6.3.19 La serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$$

cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

1. La serie converge solamente para $x = x_0$

2. Converge absolutamente y uniformemente en cualquier intervalo cerrado y acotado.
3. Existe $R > 0$ tal que la serie es absolutamente convergente para todo x tal que $|x - x_0| < R$, y divergente para todo $|x - x_0| > R$, y es uniformemente convergente en cualquier intervalo cerrado contenido en $|x - x_0| < R$, es decir, en intervalos $|x - x_0| \leq M < R$.

Ejemplo 6.3.20 Consideramos la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1}(x-3)^n$.

Para obtener el radio de convergencia usamos la expresión anterior:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-2)^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{(-2)^n} \right| = 2.$$

Así, la serie converge para $|x-3| < 1/2$ o lo que es lo mismo converge para

$$\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}.$$

Ahora debemos analizar separadamente los extremos del intervalo.

Para $x = 5/2$, tenemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} \left(\frac{5}{2} - 3\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Esta es la serie armónica y, consecuentemente, diverge.
Si $x = 7/2$ tenemos,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Esta es la serie armónica alternada y, luego,converge. De esta forma concluimos que la serie dada converge para

$$\frac{5}{2} < x \leq \frac{7}{2}$$

y su radio de convergencia es $\dfrac{1}{2}$.

Ejemplo 6.3.21 La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n!(x-x_0)^n$ converge solamente para $x = x_0$. en efecto:
Si $x \neq x_0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(n+1)!(x-x_0)^{n+}}{n!(x-x_0)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| (n+1)(x-x_0) \right| \\ &= |x-x_0| \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el radio de convergencia R vale 0, lo que significa que la serie converge solamente para $x = x_0$.

Ejemplo 6.3.22 La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!}$ tiene radio de convergencia $R = +\infty$.
En efecto, si $x \neq x_0$, tenemos:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{(x-x_0)^n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x-x_0}{n+1} \right| = 0.$$

La serie converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir $R = +\infty$.En particular, converge uniformemente en todo intervalo cerrado y acotado.

Ejemplo 6.3.23 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{3n+1}$

Si $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}}{3n+4} \cdot \frac{3n+1}{(-1)^n 2^n} \right| = \\ &= \lim_{n\to+\infty} 2 \left| \frac{3n+1}{3n+4} \right| = 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $R = \dfrac{1}{2}$.
Ahora debemos analizar que sucede en los ectremos del intervalo centrado en 0 y de radio $\dfrac{1}{2}$. es decir, para $|x| = \dfrac{1}{2}$.

- Si $x = \dfrac{1}{2}$, la serie es $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ la cual converge por criterio de series alternadas.
- Si $x = -\dfrac{1}{2}$, la serie diverge $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+1}$

Ejemplo 6.3.24 Encuentre el intervalo de convergencia y estudie separadamente lo que sucede en sus extremos para la serie,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^n}{(2n+1)^2 3^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{[2(n+1)+1]^2 3^{n+2}}\cdot\frac{(2n+1)^2 3^{n+1}}{(1)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)\cdot(2n+1)^2}{3[2n+3]^2}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+12n+9} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{4n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}\right)}{4n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{9}{4n^2}\right)} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

La serie converge absolutamente en el intervalo $]-3,3[$. El estudio en los extremos se deja de ejercicio.

Ejemplo 6.3.25 Encontrar el intervalo de convergencia sin analizar lo que pasa en los extremos para la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n x^n}{n!}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|\left[\frac{n+1}{n}\right]\cdot\frac{(n+1)n!}{(n+1)!}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.
\end{aligned}$$

Así vemos que, la serie converge absolutamente cuando x es tal que

$$|x| < \frac{1}{e}.$$

Ejemplo 6.3.26 Observemos que si $R = 1$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$ entonces $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ es una función bien definida en $|x-x_0| \leq 1$.

Consideremos la serie $1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 \cdots$ cuya suma, para $|t| < 1$, es $(1+t^2)^{-1}$.

Integrando término a término obtenemos:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} +$$

Por otro lado, como $\frac{d}{dt}\arctan t = \frac{1}{1+t^2}$, tenemos $\int_0^x \frac{d}{dt}(\arctan t)dt = \arctan x - \arctan 0 = \arctan x$. Luego,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \pm \ldots .$$

Como $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, tenemos :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

Despejando π, nos queda,

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots$$

que puede ser considerada como una definición del número π y permite calcular valores aproximados de él con el grado de exactitud que uno quiera.

Operaciones con series de potencias

Teorema 6.3.27 Si

- $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$, en $|x-a| < R_1$,
- $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x-a)^n$, en $|x-a| < R_2$,

entonces:

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n, \quad \text{en } |x-a| < R$$
$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) (x-a)^n, \quad \text{en } |x-a| < R,$$

donde $R = \min\{R_1, R_2\}$.

Ejercicios Resueltos

1. Para cada una de las siguientes series de potencias, determine su intervalo y radio de convergencia:

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

   Solución: Sea $a_n = x^n$, entonces $a_{n+1} = x^{n+1}$. Usando el criterio de la razón tenemos que:

   $$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| \\ &= \lim_{n\to+\infty}|x| \\ &= |x|\end{aligned}$$

   Luego, la serie converge si:

   $$|x| < 1 \iff -1 < x < 1$$

   Luego, el radio de convergencia es $R = 1$. En cuanto al intervalo de convergencia, estudiemos que ocurre en los valores extremos de $]-1,1[$.

   - Si $x = 1$, la serie es,
     $$\sum_{n=0}^{+\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$$
     Luego, en $x = 1$ la serie diverge.
   - Si $x = -1$, la serie es,
     $$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$
     La cual, en en virtud del criterio de divergencia (ver 1*f*), es divergente; luego en $x = -1$ la serie diverge.

   Así, el intervalo de convergencia de la serie es $]-1,1[$

   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$

Solución: Sea $a_n = (-1)^n x^n$, entonces $a_{n+1} = (-1)^{n+1} x^{n+1}$. Usando el criterio de la razón tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(-1)^n x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty} |-x| \\
&= |x|
\end{aligned}$$

Luego, la serie converge si:

$$|x| < 1 \iff -1 < x < 1$$

Luego, el radio de convergencia es $R = 1$. En cuanto al intervalo de convergencia, estudiemos que ocurre en los valores extremos de $]-1,1[$.

- Si $x = 1$, la serie es,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 1^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

  La cual, en virtud del criterio de divergencia (ver $1f$), es divergente; luego en $x = 1$ la serie diverge.

- Si $x = -1$, la serie es,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n(-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$$

  Luego, en $x = -1$ la serie diverge.

Así, el intervalo de convergencia de la serie es $]-1,1[$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

Solución: Sea $a_n = \dfrac{x^n}{n}$, entonces $a_{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. Usando el criterio de la razón tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{x^n}{n}}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1}{n}\cdot x\right| \\
&= |x|
\end{aligned}$$

Luego, la serie converge si:

$$|x| < 1 \iff -1 < x < 1$$

Luego, el radio de convergencia es $R = 1$. En cuanto al intervalo de convergencia, estudiemos que ocurre en los valores extremos de $]-1,1[$.

- Si $x = 1$, la serie es,

  $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

  La cual, en virtud del ejemplo 6.2.16 es divergente; luego en $x = 1$ la serie diverge.
- Si $x = -1$, la serie es,

  $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

  La cual, en virtud del criterio de Leibniz es convergente; luego, en $x = -1$ la serie converge

Así, el intervalo de convergencia de la serie es $[-1,1[$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$

Solución: Sea $a_n = \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$, entonces $a_{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$. Usando el criterio de la razón tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|\sqrt{\frac{n+1}{n}}\cdot x\right| \\
&= |x|
\end{aligned}$$

Luego, la serie converge si:

$$|x| < 1 \iff -1 < x < 1$$

Luego, el radio de convergencia es $R = 1$. En cuanto al intervalo de convergencia, estudiemos que ocurre en los valores extremos de $]-1,1[$.

- Si $x = 1$, la serie es,

  $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$$

  La cual, en virtud del ejemplo 6.2.16 es divergente; luego en $x = 1$ la serie diverge.

- Si $x = -1$, la serie es,

  $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

  La cual, en virtud del criterio de Leibniz es convergente; luego, en $x = -1$ la serie converge

Así, el intervalo de convergencia de la serie es $[-1,1[$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)^2\cdot 3^{n+1}}$

Solución: Sea $a_n = \dfrac{(-1)^n x^n}{(2n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}$, entonces $a_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(2n+3)^2 \cdot 3^{n+2}}$. Usando el criterio de la razón tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(2n+3)^2 \cdot 3^{n+2}}}{\dfrac{(-1)^n x^n}{(2n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}} \right| \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(2n+3)^2 \cdot 3^{n+2}} \cdot \frac{(2n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{(-1)^n x^n} \right| \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-1)x(2n+1)^2}{3(2n+3)^2} \right| \\
&= \left| \frac{x}{3} \right| \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(2n+1)^2}{(2n+3)^2} \right| \\
&= \left| \frac{x}{3} \right|
\end{aligned}
$$

Luego, la serie converge si:

$$\left| \frac{x}{3} \right| < 1 \iff -3 < x < 3$$

Luego, el radio de convergencia es $R = 3$. En cuanto al intervalo de convergencia, estudiemos que ocurre en los valores extremos de $]-3, 3[$.

- Si $x = 3$, la serie es,

  $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{(2n+1)^2 \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

  La cual, en virtud del criterio de Leibniz, es convergente; luego en $x = 3$ la serie converge.
- Si $x = -3$, la serie es,

  $$
  \begin{aligned}
  \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-3)^n}{(2n+1)^2 \cdot 3^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n \cdot 3^n}{(2n+1)^2 \cdot 3^{n+1}} \\
  &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \cdot 3} \\
  &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}
  \end{aligned}
  $$

La cual, en virtud de la serie de referencia 6.2.16 es convergente; luego, en $x = -3$ la serie converge

Así, el intervalo de convergencia de la serie es $[-3, 3]$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2(x+2)^n}{n+1}$

Solución: Sea $a_n = \dfrac{n^2(x+2)^n}{n+1}$, entonces $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2(x+2)^{n+1}}{n+2}$.

Usando el criterio de la razón tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)^2(x+2)^{n+1}}{n+2}}{\dfrac{n^2(x+2)^n}{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^2(x+2)^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n^2(x+2)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|(x+2)\cdot\frac{(n+1)^3}{n^2(n+3)}\right| \\
&= |x+2|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^3}{n^2(n+3)}\right| \\
&= |x+2|
\end{aligned}$$

Luego, la serie converge si:

$$|x+2| < 1 \iff -3 < x < -1$$

Luego, el radio de convergencia es $R = 1$. En cuanto al intervalo de convergencia, estudiemos que ocurre en los valores extremos de $]-3,-1[$.

- Si $x = -1$, la serie es,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2\cdot 1^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{n+1}$$

Notemos que:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n+1} = +\infty \neq 0$$

Luego, en virtud del criterio de divergencia , esta serie diverge; luego en $x = -1$ la serie diverge.

- Si $x = -3$, la serie es,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 \cdot (-1)^n}{n+1}$$

La cual, en virtud del criterio de divergencia , es divergente; luego en $x = -3$ la serie diverge.

Así, el intervalo de convergencia de la serie es $]-3, -1[$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2(x+1)^n$

Solución: Sea $a_n = n^2(x+1)^n$, entonces $a_{n+1} = (n+1)^2(x+1)^{n+1}$.

Usando el criterio de la razón tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)^2(x+1)^{n+1}}{n^2(x+1)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left|(x+1) \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2}\right| \\
&= |x+1| \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| \\
&= |x+1|
\end{aligned}$$

Luego, la serie converge si:

$$|x+1| < 1 \iff -2 < x < 0$$

Luego, el radio de convergencia es $R = 1$. En cuanto al intervalo de convergencia, estudiemos que ocurre en los valores extremos de $]-2, 0[$.

- Si $x = -2$, la serie es,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2(-2+1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2(-1)^n$$

La cual, en virtud del criterio de divergencia (ver 1*f*), es divergente; luego en $x = -2$ la serie diverge.

- Si $x = 0$, la serie es,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2(0+1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2$$

Luego, en virtud del criterio de divergencia (ver $1f$), esta serie diverge; luego en $x = 0$ la serie diverge.

Así, el intervalo de convergencia de la serie es $]-2, 0[$

2. Una función importante definida mediante series es la función de Bessel de orden n, donde n es un entero no negativo, definida mediante,

$$J_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{k! \cdot \Gamma(k+n+1) \cdot 2^{2k+n}}$$

a) Demuestre que el dominio de J_n es $\mathbb{R}$

b) Derivando la serie $x^n J_n(x)$ y usando una propiedad apropiada de la función Gama, demuestre que:

$$\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x)$$

c) Usando la derivada de un producto y posteriormente dividiendo por x^{n-1}, verifique que:

$$xJ_n'(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x)$$

Solución:

a)

$$J_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{k! \cdot \Gamma(k+n+1) \cdot 2^{2k+n}}$$

Sea $b_k = \dfrac{(-1)^k x^{2k+n}}{k! \cdot \Gamma(k+n+1) \cdot 2^{2k+n}}$, $b_{k+1} = \dfrac{(-1)^{k+1} x^{2k+2+n}}{(k+1)! \cdot \Gamma(k+n+2) \cdot 2^{2k+2+n}}$.

Aplicando el criterio de la razón tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| &= \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{k+1}x^{2k+2+n}}{(k+1)!\cdot\Gamma(k+n+2)\cdot 2^{2k+2+n}}}{\dfrac{(-1)^k x^{2k+n}}{k!\cdot\Gamma(k+n+1)\cdot 2^{2k+n}}}\right| \\
&= \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}x^{2k+2+n}}{(k+1)!\cdot\Gamma(k+n+2)\cdot 2^{2k+2+n}}\cdot\frac{k!\cdot\Gamma(k+n+1)\cdot 2^{2k+n}}{(-1)^k x^{2k+n}}\right| \\
&= \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{(-1)x^2}{(k+1)(k+n)}\right| \\
&= \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{x^2}{(k+1)(k+n)}\right| \\
&= 0 \,<\, 1.
\end{aligned}
$$

Luego, el radio de convergencia es $R = +\infty$, por lo tanto, $Dom\,(J_n(x) = \mathbb{R})$

b) Notemos que:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\cdot\Gamma(k+n+1)}\left(\frac{x^2}{2^2}\right)^k$$

Entonces:

$$x^n J_n(x) = \frac{x^{2n}}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\cdot\Gamma(k+n+1)}\left(\frac{x^2}{2^2}\right)^k$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) &= \frac{2nx^{2n-1}}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x^2}{2^2}\right)^k \\
&+ \frac{x^{2n}}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(k+n+1)} \cdot k \cdot \left(\frac{x^2}{2^2}\right)^{k-1} \cdot \frac{2x}{2^2} \\
&= x^n \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(k+n+1)} \cdot (n+k) \cdot \left(\frac{x^2}{2^2}\right)^k \\
&= x^n \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(k+n)} \cdot \left(\frac{x^2}{2^2}\right)^k \\
&= x^n \cdot J_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

c) Ya que:

$$(x^n J_n(x))' = nx^{n-1} J_n(x) + x^n J_n'(x) = x^n J_{n-1}(x)$$

Se tiene que:

$$nx^{n-1} J_n(x) + x^n J_n'(x) = x^n J_{n-1}(x)$$

La igualdad vale para $n \geq 1$ y $x = 0$.

Si $x \neq 0$ entonces:

$$nJ_n(x) + xJ_n'(x) = xJ_{n-1}(x)$$

Y así:

$$xJ_n'(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x)$$

Ejercicios Propuestos

1. *a*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\sqrt{n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)x^{2n}}{5^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!x^n}{(2n+1)!}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x-4)^{n+1}}{(n+1)^3}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)2^{3n}x^{3n+1}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^2(x-2)^n}{n!}$

j) $\displaystyle-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+2^n)x^n}{n}$

2. En base a la definición de la función de Bessel del ejercicio resuelto 2, y los resultados allí obtenidos:

a) Verifique, usando la definición de J_n, que:

$$x^{-n}J_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k! \cdot \Gamma(k+n+1) \cdot 2^{2k+n}}$$

b) Demuestre, derivando la serie, que:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-n}J_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{(k-1)! \cdot \Gamma(k+n+1) \cdot 2^{2k+n-1}}$$

c) Cambiando el índice de la sumatoria, verifique que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x^{-n}J_n(x)\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{k! \cdot \Gamma(k+1+n+1) \cdot 2^{2k+n+1}} \\ &= -x^{-n}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1+n}}{k! \cdot \Gamma(k+n+1+1) \cdot 2^{2k+n+1}}\end{aligned}$$

d) Observando la última serie con la que define $J_n(x)$, verifique que:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-n}J_n(x)\right) = -x^{-n}J_{n+1}(x)$$

e) Demuestre que:

$$xJ_n'(x) = -xJ_{n+1}(x) + nJ_n(x)$$

f) Demuestre que:

$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$
$$2nJ_n(x) = x\left[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\right]$$

g) Pruebe que:

$$J_{n-1}(x) = J_n'(x) + \frac{n}{x}J_n(x)$$

h) Pruebe que:

$$xJ_{n-1}'(x) = -xJ_n(x) + (n-1)J_{n-1}(x)$$

i) Demuestre que se cumple la siguiente ecuación:

$$x^2J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0$$

Esta ecuación demuestra que la función de Bessel $J_n(x)$, es solución de la ecuación diferencial:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

De esto deriva su importancia.

6.4. Teorema de Taylor

La familia de funciones más simples son los polinomios ya que son muy fáciles de derivar y de integrar. El teorema de Taylor permite, bajo ciertas hipótesis, aproximar funciones mediante polinomios lo que facilita cálculos numéricos directos que pueden ser muy difíciles y a veces hasta imposibles.

Consideremos una función f definida en algún intervalo de $\mathbb{R}$, tal que la n-ésima derivada, $f^{(n)}(x)$, existe en un intervalo que contiene a un punto a fijo y si x es un punto cualquiera de dicho intervalo, entonces nuestro objetivo es buscar una serie de potencias que converja hacia f en algún intervalo.

Primero buscaremos polinomios usando de forma recursiva integración por partes.

Supongamos que f y f' son continuas en $[a,b]$. Entonces, para cualquier $x \in [a,b]$ se tiene, usando el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_a^x f'(y)dy = f(x) - f(a). \tag{6.5}$$

Entonces,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)dy \tag{6.6}$$

Suponiendo que f'' existe, podemos volver a integrar por partes la integral de la ecuación 6.6,

$$\begin{cases} f'(y) & \Rightarrow \ f''(y)dy \\ dy & \Rightarrow \ y \Rightarrow y - x = -(x-y) \end{cases}$$

Ahora f puede escribirse como:

$$f(x) = f(a) - (x-y)f'(y)\Big|_a^x \int_a^x (x-y)f''(y)dy.$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-y)f''(y)dy \tag{6.7}$$

Integrando por partes la integral de la ecuación 6.7,

$$\begin{cases} f''(y) & \Rightarrow \ f'''(y)dy \\ (x-y)dy & \Rightarrow \ -\dfrac{1}{2}(x-y)^2. \end{cases}$$

Entonces la ecuación 6.7 se transforma en:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) - \frac{1}{2}[(x-y)^2 f''(y)]_a^x + \frac{1}{2}\int_a^x (x-y)^2 f'''(y)dy.$$

El proceso puede continuar indefinidamente siempre que las derivadas de orden n de f existan y sean continuas, así todas las integrales existen. Aplicando n veces este procedimiento obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 6.4.1 Teorema de Taylor- Forma 1 Si $f(x)$ y sus primeras $(n+1)$ derivadas son continuas en $[b_1, b_2]$ y si $b_1 < a < b_2$, entonces para x en el intervalo dado se tiene:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + R_n(x,a), \tag{6.8}$$

donde,

$$R_n(x,a) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-y)^n f^{(n+1)}(y)dy.$$

Definición 6.4.2

- El término $R_n(x,a)$ se llama resto.
- $f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{n!}$ se llama polinomio de Taylor de grado n y centrado en a de f.
- Si f tiene las derivadas continuas de todos los ordenes entonces los polinomios de Taylor se pueden transformar en una serie llamada **serie formal de Taylor** :

$$f(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^x}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}.$$

Le decimos formal porque no se sabe a priori si realmente esta serie converge a $f(x)$.

Del enunciado del teorema 6.8 podemos deducir que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^x}{n!}$ converge a $f(x)$, en algún intervalo centrado en $x = a$ si y sólo si $R_n(x,a) \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Para demostrar este teorema necesitamos darle una forma distinta al resto $R_n(x,a)$.

Teorema 6.4.3 Teorema de Taylor- Forma 2: Supongamos que $f(x)$ tiene sus primeras n derivadas continuas y sla derivada $f^(n+1)(x)$ existe en un intervalo $[b_1, b_2]$. Sea a tal que $b_1 < a < b_2$. Entonces para todo x en $]b_1, b_2[$ se tiene:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(a)(x-a)^k}{k!} + R_n(x,a), \tag{6.9}$$

donde $R_n(x,a) = \dfrac{(x-a)^{n+1} f^{n+1}(c^*)}{(n+1)!}$, para algún c^* tal que $a < c^* < x$.

Demostración: Sea $R_n(x,a)$ definido por:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(a)(x-a)^k}{k!} + R_n(x,a)$$

Ahora consideraremos la función φ definida por

$$\varphi(y) = f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(y)(x-y)^k}{k!} - \frac{(x-y)^{n+1} r_n(x,a)}{(n+1)!}. \tag{6.10}$$

Demostraremos que φ satisface el Teorema de Rolle, en el intervalo $a \leq y \leq x$ con $b_1 < a < b_2$ y $b_1 < xb_2$.

Reemplazando $y = x$ en la ecuación 6.10, tenemos que

$\varphi(x) = 0$ y
$\varphi(a) = f(x) - f(a) - \sum \dfrac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} - \dfrac{(x-a)^{n+1} r_n(x,a)}{(n+1)!}$

$$\varphi(a) = 0 \Leftrightarrow R_n(x,a) = \frac{(x-y)^{n+1} r_n(x-a)}{(h+1)} \tag{6.11}$$

Por lo tanto, elegimos $r_n(x-a)$ de modo que se cumpla la igualdad 6.11).

La función φ satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a,x]$, por lo cual existe un punto c^* en $]a,x[$ donde $\varphi'(c^*) = 0$.

$$\varphi'(y) = -f'(y) - \sum_{k=1}^{n} f^{k+1}\frac{(y)(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}\frac{(y)(x-y)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(x-y)^n r_n(x,a)}{n!}$$

Desarrollando las sumatorias, queda finalmente,

$$\varphi'(y) = -\frac{f^{(n+1)}(y)(x-y)^n}{n!} + \frac{(x-y)^n r_n(x,a)}{n!}$$

Por Teorema de Rolle, existe $c^* \in]a,x[$ tal que

$$\varphi'(c^*) \Leftrightarrow -\frac{f^{(n+1)}(c^*)(x-c^*)^n}{n!} + \frac{(x-c^*)^n r_n(x,a)}{n!} = 0$$

$$\Leftrightarrow r_n(x,a) = -f^{(n+1)}(c^*); a < c^* < x$$

Reemplazando este valor de $r_n(x,a)$ en (2) obtenemos que $R_n(x,a) = \dfrac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c^*)}{(n+1)!}$, para algún c^* entre x y a .$\blacksquare$

Observación 6.4.4 1. Si $R_n(x,a) \to 0$ cuando $x \to +\infty$, entonces $f(x)$ puede ser representada mediante la serie de Taylor centrada en a en algún intervalo que contiene al punto a.

2. Cuando $a = 0$, la serie resultante por esta vía se llama **serie de Maclaurin** y tiene la forma:
$$f(x) = f(0) + \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}.$$

3. Otra forma equivalente de escribir el resto es
$$\frac{(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!} x^n, \text{ para algún } \theta \in (0,1).$$

6.4.1. Cálculo de polinomios y series de Taylor para funciones elementales

1. **La serie exponencial:** es la serie de Taylor centrada en 0 o serie de Maclaurin de $f(x) = e^x$.

   Los polinomios de Taylor de grado k y centrado en $a = 0$ lo denotamos por $T_k(0)$.
$$T_n(0) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$$
$$\begin{aligned} T_0(0) &= f(0) = e^0 = 1 \\ T_1(0) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x = 1 + \frac{x}{1!} \\ T_2(0) &= T_1(0) + \frac{f''(0)}{2!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \end{aligned}$$
   Considerando que $f^{(k)}(0) = e^x\Big|_{x=0} = e^0 = 1;$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos que:
$$T_n(0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Ahora podemos estudiar la convergencia de la serie de potencias resultante cuando $x \neq 0$. Recordemos que toda serie de potencias converge para $x = a$.

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{(n+1)}.$$

Por lo tanto, $\lim \dfrac{|x|}{(n+1)} = 0 < 1$; para todo $x \in \mathbb{R}$ y la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para saber si esta serie convergente representa a la función $f(x) = e^x$, debemos analizar el resto dado por el Teorema de Taylor:

$$R_n(x,0) = \frac{x^{n+1}e^{c^*}}{(n+1)!};\ \text{con } c^* \in]0, x[.$$

Si dejamos x fijo, $R_n(x,0) \to 0$ cuando $n \to +\infty$ pues $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)} \to 0$ por ser el término general de una serie convergente.

Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

En particular si $x = 1$

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Esta fórmula permite calcular valor aproximados de e con el grado de exactitud que uno quiera. Por ejemplo, calculemos el número e con 4 decimales exactos.

Esto quiere decir que $R_n(1,0) = \dfrac{e^{c^*}}{(n+1)!}$, con c^* entre 0 y 1, debe ser menor que 10^{-4}. Para facilitar los cálculos podemos usar acotaciones intermedias como mostraremos a continuación.

$$R_n(1,0) = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4}.$$

Para determinar la cantidad mínima de términos que debemos sumar para alcanzar el grado de exactitud que queremos, debemos resolver la inecuación:

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{10{,}000},$$

tomando a n como incógnita. La inecuación es equivalente a

$$3 \times 10^4 < (n+1)!.$$

Con una calculadora se puede encontrar que:

$$7! = 5{,}040$$
$$8! = 40{,}320$$

Por lo tanto basta tomar $n = 8$. Así, tenemos que:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \approx 2,7183.$$

2. **La serie de coseno:**

   Sea la función $f(x) = \cos x$, $a = 0$. Tenemos que:

   - $f'(x) = -\operatorname{sen} x$
   - $f''(x) = -\cos x$
   - $f'''(x) = \operatorname{sen}$
   - $f^{(iv)}(x) = \cos x$
   - $f^{(v)} = -\operatorname{sen} x$
   - $f^{(vi)}(x) = -\cos x$
   - $f^{vii}(x) = \operatorname{sen} x$
   - $f^{(viii)}(x) = \cos x$

   En general:

   - $f^{(4n+1)}(x) = \operatorname{sen} x$
   - $f^{(4n+2)}(x) = -\cos x$
   - $f^{(4n+3)}(x) = \operatorname{sen} x$

- $f^{(4n)}(x) = \cos x$

Por lo tanto:

- $f^{(4n+1)}(0) = 0$
- $f^{(4n+2)}(0) = -1$
- $f^{(4n+3)}(0) = 0$
- $f^{(4n)}(0) = 1$

Así, los coeficientes de Taylor $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ para la serie de $\cos x$ son:

- $a_{4n+1} = a_{4n+3} = 0$
- $a_{4n+2} = \dfrac{-1}{(4n+2)!}$
- $a_{4n} = \dfrac{1}{(4n)!}$

Luego la serie de Taylor de $f(x) = \cos x$ es

$$f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Esta serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto de deja para que el lector lo verifique.

3. $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$

4. **La serie geométrica**
   $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad |x| < 1.$

5. $\ln(1+x) = \displaystyle\sum \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \qquad -1 < x \leq 1.$

6. **La serie binomial**
   $(1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \qquad |x| < 1.$

   Consideremos la función $f(x) = (1+x)^\alpha$, con $x > -1$, la que puede ser escrita como:
   $$(1+x)^\alpha = e^{\alpha Ln(1+x)}.$$

Así,

$$\frac{d}{dx}\left[(1+x)^{\alpha}\right] = e^{\alpha Ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha}{1+x} = 0\alpha(1+x)^{\alpha-1} = \alpha(1+x)^{\alpha-1}.$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left((1+x)^{\alpha}\right) = \frac{d}{dx}\left(\alpha(1+x)^{\alpha-1}\right) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}.$$

Sucesivamente obtenemos la expresión;

$$\frac{d^n}{dx^n}\left((1+x)^{\alpha}\right) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

para $x=0$; $\quad \frac{d^n}{dx^n}\left(\alpha(1+x)^{\alpha}\right)|_{x=0} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$

Aplicando el teorema de Taylor podemos escribir:

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha} &= 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+\\ &+\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\cdot(1+\theta)^{\alpha-n}\cdot x^n.\end{aligned}$$

Sea S_n la suma parcial de la serie de Taylor:

$$S_n = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$\begin{aligned}|S_n-(1+x)^{\alpha}| &= \Big|\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-n+1)}{(1+\theta x)^{n-\alpha}} - \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\Big||x|^n\\ &\Big|\frac{(1-\theta)^{1-1}}{(n-1)!(1+\theta x)^{n-\alpha}} - \frac{1}{n!}\Big|\Big|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\Big||x|^n\\ &= \Big|\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}\cdot\frac{(1+\theta x)^{n-1}}{(1+\theta x)^{n-\alpha}} - \frac{1}{n}\Big|\Big|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\Big||x|^n\end{aligned}$$

No es difícil verificar que $\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\right| \leq K$, para alguna constante K

Por otro lado,

$$\frac{(1+\theta x)^{n-1}}{(1+\theta x)^{n-\alpha}} = (1+\theta x)^{\alpha-1}$$

y

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < \frac{1-\theta}{1-\theta} = 1.$$

De esta forma, la cantidad

$$\left|\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^{n-1}} \cdot (1+\theta x)^{\alpha-1} - \frac{1}{b}\right|\left|\frac{\alpha(\alpha-1)-(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\right|,$$

es acotada y, en consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} |S_n - (1+x)^{\alpha}| \to 0,$$

para todo $|x| < 1$. Así,

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Se deja como ejercicio verificar que esta serie diverge para $x = 1$ y $x = -1$.
Dos casos particulares de la serie binomial son:

- Si $\alpha = 1$ en la serie binomial y tenemos,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)(-2)(-3)\cdot(-n)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

  Reemplazando x por$-x$, tenemos

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

- Si $\alpha = -2$ y usando $-x$ en vez de x, tenemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots; \qquad \text{para} -1 < x < 1.$$

Ejemplo 6.4.5 1. Usando la definición de $\cosh x$ y la serie exponencial, podemos obtener la serie que representa a entonces $\cosh x$.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!};\ \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \cos hx &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)\frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Observar que si n es impar, entonces los coeficientes son cero. Por lo cual, podemos reescribir la serie como:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}; \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}; \qquad |x| < +\infty.$$

2. Encontrar la serie de potencias para

$$e^{-x}\ln(1+3x)$$

Usando el teorema de la aritmética de series.

Solución:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}; \quad |x| < +\infty$$

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} y^n}{n}; \qquad |y| < 1. \tag{6.12}$$

Tomando $y = 3x$ en la ecuación 6.12 y cambiando el índice n por $n+1$ para poder comenzar a contar de cero, nos queda:

$$\ln(1+3x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^{n+1} x^{n+1}}{n+1}; \qquad |x| < \frac{1}{3}$$

Recordemos el producto de Cauchy de series:

$$\Big(\sum a_n\Big)\Big(\sum b_n\Big) = \sum c_n;$$

donde, $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$, $a_k = \frac{(-1)^k x^k}{k!}$, $\quad b_k = (-1)^k \frac{3^{k+1} x^{k+1}}{k+1}$.

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \cdot \frac{(-1)^{n-k} 3^{n-(k+1)} x^{n-k+1}}{n-k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{3^{n-k-1}}{k!(n-k+1)} (-1)^n x^{n+1}; \qquad |x| < \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Entonces:

$$e^{-x} \ln(1+3x) = \sum_{h=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{3^{n-k-1}}{(n-k+1)} \right] (-1)^n x^{n+1}$$

Recordemos que para que el producto de series converja al producto de sus respectivas sumas la convergencia debe ser absoluta.

Observación 6.4.6 Observemos además que la forma resultante "es una serie de potencias escrita en la normal". Aveces pueden suceder casos en que no es tan directo obtener la forma normal de una serie de potencias.
Por ejemplo:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right).$$

En estos casos se tiene la fórmula:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{[n/2]} a_k b_{n-2k}\right) x^n.$$

Ejemplo 6.4.7 No siempre se cumple que el valor de la función coincide con el valor de su serie formal de Taylor. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & , x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \geq 0$ y entonces $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = 0 \neq e^{-1/x} = f(x)$,para $x > 0$.

Ejercicios resueltos

1. Escriba la función $f(x) = \sqrt{x}$ como el polinomio de Taylor de grado 6 centrado en $a = 3$, más el respectivo resto.

   Solución: El polinomio de Taylor de grado n de $f(x)$ centrado en $x = a$ se escribe

$$f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

   El resto en este caso es

$$R_n(x, \theta) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}; \quad \text{con } a < \theta < x.$$

   Para $f(x) = \sqrt{x}$ tenemos

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2x^{1/2}} \\
f''(x) &= -\frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{x^{3/2}} \\
f'''(x) &= \frac{3}{2^3} \cdot \frac{1}{x^5/2} \\
f^{('v)}(x) &= -\frac{3 \cdot 5}{2^4} \cdot \frac{1}{x^{7/2}} \\
f^{(v)}(x) &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^5}, \frac{1}{x^{9/2}} \\
f^{(vi)}(x) &= -\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^6} \cdot \frac{1}{x^{11/2}} \\
f^{vii}(x) &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2^7} \cdot \frac{1}{x^{13/2}}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} \\
&= \sqrt{3} + \frac{1}{2 \cdot 3^{1/2}} \cdot (x-3) - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^{3/2}}(x-3)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{2^3} \cdot \frac{1}{3^{5/2}}(x-3)^3 - \frac{1}{4!} \cdot \frac{3 \cdot 5}{2^4} \cdot \frac{1}{3^{3/2}}(x-3)^4 \\
&\quad + \frac{1}{5!} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^5} \cdot \frac{1}{3^{9/2}}(x-3)^5 - \frac{1}{6!} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^6} \cdot \frac{1}{3^{11/2}}(x-3)^6 \\
&\quad + \frac{1}{7!} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2^7} \cdot \frac{1}{(\theta)^{13/2}}(x-3)^7, \qquad \text{con } 3 < \theta < x.
\end{aligned}
$$

2. Obtenga la serie de Taylor de $f(x) = \ln x$, centrada en $x = 4$, y calcule su intervalo y radio de convergencia:

Solución: Para $f(x) = \ln x$ tenemos,

- $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
- $f^{(''')}(x) = \dfrac{2}{x^3}$
- $f^{(iv)}(x) = -\dfrac{2\cdot 3}{x^4}$
- $f^{(v)}(x) = \dfrac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5}$

  Y en general

- $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

Así, la serie de Taylor de $f(x) = \ln x$, centrado en $x = 4$ es:

$$\ln(4) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{4^n}\frac{1}{n!}(x-4)^n = \ln(4) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-4)^n}{n\cdot 4^n}$$

Para estudiar su intervalo y radio de convergencia, notemos que el termino general de la serie es de la forma:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}(x-4)^n}{n\cdot 4^n}$$

y por ende,

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}(x-4)^{n+1}}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}$$

Usando el criterio de la razón:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+2}(x-4)^{n+1}}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^{n+1}(x-4)^n}{n\cdot 4^n}}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}(x-4)^{n+1}}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 4^n}{(-1)^{n+1}(x-4)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)(x-4)n}{4(n+1)}\right| \\
&= \left|\frac{x-4}{4}\right|\cdot\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n}{n+4}\right| \\
&= \left|\frac{x-4}{4}\right|\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+4} \\
&= \left|\frac{x-4}{4}\right|\cdot 1 \\
&= \left|\frac{x-4}{4}\right|
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L = \left|\frac{x-4}{4}\right|$$

El Criterio de la razón dice que la serie es convergente si $L<1$, luego, imponiendo esta condición tenemos que:

$$\left|\frac{x-4}{4}\right|<1 \iff |x-4|<4 \iff -4<x-4<4 \iff 0<x<8.$$

Por lo tanto, la serie tiene radio de convergencia $R=4$, estudiemos que ocurre en los extremos de $]0,8[$.

- Si $x=0$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(-1)^{n+1}(x-4)^n}{n\cdot 4^n} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(-4)^n}{n4^n} = \frac{(-1)(-1)^n(-1)^n(4)^n}{n4^n} \\
&= \frac{(-1)}{n}.
\end{aligned}$$

Luego, la serie es:

$$\ln 4 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, la serie diverge para $x = 0$.

- Si $x = 8$.

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}(x-4)^n}{n \cdot 4^n}$$

se transforma en

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Entonces la serie a estudiar es:

$$\ln 4 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

que es una serie alternada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

que según el criterio de Leibniz es convergente. Por lo tanto, la serie converge en $x = 8$.
Luego, el intervalo de convergencia de esta serie es $]0, 8]$.

3. Use la fórmula:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Para demostrar que:

$$\cos^2 x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

Solución: Usando la serie correspondiente a la función $\cos x$ que converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Reemplando en ella x por $2u$, obtenemos:

$$\cos(2u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot 2^{2n} \cdot u^{2n}$$

$$\frac{1+\cos 2u}{2} = \frac{1}{2}\left(2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n} u^{2n}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n)!} 2^{2n-1} u^{2n}$$

Concluimos que:

$$\cos^2 u = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n-1} u^2$$

Lo cual es valido para todo $u \in \mathbb{R}$.

Ejercicios propuestos

Las series de las funciones :$\frac{1}{x-1}, e^x, \cos x, \operatorname{sen} x, \ln(x+1)$ y la serie binomial son consideradas series de referencias. Es decir, es lo mínimo que Ud. debe conocer y pueden ser usadas cada vez que sea necesario sin deducirlas, además, debe recordar su intervalo de convergencia.

1. Escriba las siguientes funciones como el polinomio de Taylor de grado 6 centrado en a mas el respectivo resto:

   a) e^x, $a = 2$.

   b) $\operatorname{sen} x$, $a = \frac{\pi}{4}$.

   c) $\cosh x$, $a = 0$.

2. Obtenga las siguientes series usando la definición de la serie de Taylor. Calcule su intervalo de convergencia.

   a) e^x en potencias de $(x-3)$.

   b) e^x en potencias de $(x+2)$.

   c) $\cos x$ en potencias de $(x+\pi/3)$.

   d) $\ln x$ en potencias de $(x-4)$.

   e) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ en potencias de $(x-3)$.

3. en los siguientes ejercicios determine las series de las funciones dadas usando sustituciones apropiadas en las series de referencia

a) e^{-x^2}.

b) $\cos 2x$.

c) $\cos x^2$.

d) $\dfrac{1}{1+x^2}$.

e) $\dfrac{1}{1+x^4}$.

f) $\sqrt{1+\operatorname{sen} x^2}$.

g) $\operatorname{sen}\sqrt{x}$.

h) $\ln(1+4x^3)$.

4. Use la fórmula $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ para obtener la serie de $\operatorname{sen}^2 x$. Verifique la identidad fundamental de la trigonometría usando las series obtenidas en este ejercicio y el anterior.

5. Use el teorema de producto de series para calcular las series de :

   a) $x\cos x$.

   b) $\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$.

   c) $\dfrac{e^{3x}}{1+4x}$.

   d) $\ln(1-x)\cos x$.

   e) $\cos 3x(2+x^3)$.

   f) $\dfrac{1+x}{1-x}$.

6. Calcule la serie de $\operatorname{arc\,sen} x$ usando:

   a) El Teorema Fundamental del Cálculo para escribir arcoseno como una integral entre 0 y x.

   b) Use la serie binomial para $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

   c) Use el teorema de integración de series para obtener la serie de arcoseno integrando la serie de $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

   d) Determine el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

7. Calcule la serie de $\arctan x$ usando el mismo procedimiento que el propuesto en el ejercicio (6).

8. *a*) Calcule el intervalo de convergencia de la serie de $\arctan x$ obtenida en (7).

   b) Analice la convergencia de la serie en los extremos del intervalo.

   c) Demuestre por continuidad que la serie obtenida en el ejercicio (7) representa también a $\arctan 1$.

   d) Calcule un valor aproximado de π usando la serie en $x = 1$.

9. Calcule un valor aproximado con tres decimales del área bajo al curva e^{-x^2} cuando x varía entre 0 y 1.

10. Calcule un valor aproximado con tres decimales del área bajo al curva $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ cuando x varía entre 0 y $\dfrac{\pi}{2}$.

11. Use la serie binomial para calcular un valor aproximado de la integral elíptica de segunda clase
$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 x}\, dx.$$
Nota: Vea la guía de longitudes de curva para recordar lo que es una integral elíptica.
Respuesta : $\approx 1,22....$

12. Calcule un valor aproximado de la integral $I = \displaystyle\int_0^{\pi/6} (\cos x)^{5/4}\, dx$. Siga el siguiente camino:

    a) Escriba $I = \displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos x \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2})^{1/4}\, dx = \int_0^{1/2} (1-u^2)^{1/8}\, dx$, donde $u = \operatorname{sen} x$.

    b) Use la serie binomial.

    Respuesta: $\approx 0,494........$

Las series de Taylor también sirven para calcular algunos límites. En estos casos se necesitan sólo algunos términos de la serie , no es necesario conocer el término general.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$. Respuesta: $\dfrac{1}{3}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}$. Respuesta: 1.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \ln(1+x)}{x^2}$. Respuesta: $\frac{1}{2}$.

13. *a*) Calcule el polinomio de Taylor de grado n y centrado en $x_0 = 0$ de la función:

$$f(x) = \cosh x$$

b) Deduzca de (a) que $\cosh x$, en una vecindad del cero, puede ser aproximado por una parábola. Encuentre tal parábola.

c) Calcule cosh(0,7) usando el polinomio de Taylor de grado 4.

d) Un cable pesado, perfectamente flexible e inextensible, adopta en equilibrio la forma de una catenaria; haciendo abstracción de la escala, su ecuación es: $y = \cosh x$. Usando los resultados anteriores, esta curva puede ser sustituida, en una vecindad del origen , por una parábola. ¿Hasta qué abscisa el error que con ello se comete es inferior al uno por ciento ?

14. *a*) Escriba - sin hacer los càlculos y diciendo a cuál serie de referencia corresponde - la serie de potencias de x de las funciones:

$$\frac{1}{1+x}, \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

b) Obtenga la serie de potencias de x de $\dfrac{1-x}{1+x}$ y su intervalo de convergencia.

c) Obtenga la serie de potencias en (b) para calcular $\dfrac{1003}{997}$ con 6 decimales exactos.

d) Determine el desarrollo en serie de potencias de x de $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

Indicación: Amplifique la cantidad subradical por $(1-x)$ para escribir:
$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = (1-x)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Bibliografía

1. T. Apostol : *Calculus*. Editorial Reverté (1965).
2. S. Banach: *Cálculo diferencial e integral*. Ed. Hispano-americana (1973).
3. R. Bartle y D. Sherbert : *Introducción al análisis matemático de una variable.* Editorial Limusa (1989).
4. G. Bobadilla y J. Billeke : *Cálculo I.* Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago de Chile, 1997.
5. L. Bers: Calculus. Holt, Rinehart and Winston ,inc.1969.
6. M. L. Bittinger: Calculus. Addison - Wealey, 1980.
7. A.A. Blank : *Problemas de cálculo y análisis matemático.* Limusa-Wiley, México, 1971.
8. J. de Burgos : *Cálculo infinitesimal de una variable* McGraw Hill.1997
9. G. W.Bluman : *Problem book for first year calculus* Springer-Verlag.1984
10. J.C Guajardo y J.S Urrea : *Cuarenta problemas resueltos de Cálculo Integral .* Trabajo de titulación, Universidad de Santiago de Chile, 2001
11. F. Granero : *Cálculo.* McGraw - Hill. Madrid (1991).
12. S. L Grossman : Calculus . Academic Press, 1981.
13. N. B. Haaser, J.P.Lasalle y J.A. Sullivan: Análisis Matemático, Vol 1.Ed. Trillas, 1988.
14. H. S.Hall y S. R. Knight: Trigonometría Elemental, Editorial Hispano Americana, México, 1961.
15. G.H.Hardy : A Course of Pure Mathematics . Cambridge University Press, 1960.
16. J. Kitchen.: *Cálculo.* McGraw - Hill (1986).
17. K. Kuratowski : *Introduction to calculus.* Pergamon Press (1961).
18. L.D. Kudriávtsev, A.D. Kutásov et al.: *Problemas de Análisis Matemático.* Editorial Mir, Moscú.
19. R. Labarca *Apuntes Cálculo II-Periodo de Verano* Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago de Chile, 2001

20. H. Larsen.: *Tables, Formulas and curves.* Holt, Rinehart and Winston (1953).

21. E. Lima.: *Análise real.* IMPA (1989).

22. E. A. Maxwell : *An analytical calculus* . Cambridge University Press (1959).

23. E. D. Rainville: *Infinite Series.* Macmillan, 1967.

24. REA 's Problem Solvers: *Advanced Calculus.*1999.

25. R. Rothe : Matématica superior. Tomos I y II. Editorial Labor ,1959.

26. Réunion de Professeurs : Exercices de trigonométrie. Ligel, París, 1960.

27. W. N Rose: Matemática para ingenieros. Editorial Labor, 1936.

28. R. T. Seeley: *Calculus of several variables.* Scott, Foresman and Co. 1970.

29. J. Stewart: *Cálculo multivariable* . Editorial Thomson, 1999.

30. M. Spivak : Calculus. Ed. Reverté. S. A. Barcelona, 1970.