INTRODUCCIÓN

El presente apunte, el primero de dos, son los apuntes de clase que he realizado en la asignatura Matemática General código 10.052 en el plan común de Ingeniería de Ejecución de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Santiago de Chile, asignatura que tiene carácter régimen anual.

Este apunte se realizó con el pensamiento puesto en los alumnos que se inician en nuestras carreras de Ingeniería, apostando a que este instrumento, servirá de guía, en la adquisición de los elementos base en la Matemática, que nos apoyaran en las otras disciplinas de las diversas asignaturas.

Corresponde a una introducción al Álgebra Básica considerando entre otros el estudio de las Relaciones y Funciones, los Números Naturales (inducción sumatorias, progresiones, análisis combinatorio, teorema del binomio, sucesiones) , una breve introducción a Estructuras Algebraicas con énfasis en Números Complejos y Polinomios.

El apunte contiene una gran cantidad de ejemplos resueltos y propuestos y debemos considerarlo como una guía que conduzca al estudio de la gran cantidad de textos que sobre los temas declarados existen. En relación con el estudio del apunte, que se desarrollará durante el primer semestre académico, es conveniente apoyarse en la página web http://matgen.usach.cl , página de la coordinación que dirijo, y que contiene los controles de ejercicios y las pruebas realizadas durante el año 2003

Espero que el uso de este apunte, en cada una de los cursos que contempla la coordinación, sirva de apoyo para enriquecerlo en su presentación futura, la cual, quizás incorpore otros recursos.

El segundo apunte, que espero se pueda editar en el segundo semestre académico del presente año, contendría: Matrices, Determinantes, Sistemas de Ecuaciones Lineales, Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales, así como una introducción a Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Mucho éxito en su aprendizaje

Heraldo González Serrano
Coordinador Matemática General 10.052

CONTENIDOS

LA MATEMÁTICA: CIENCIA Y LENGUAJE DE LAS CIENCIAS

En los congresos internacionales de Matemática se reúnen miles de matemáticos de todos los países para discutir sus descubrimientos. ¿Qué cosas descubren? ¿De qué se ocupan?. Se ocupan de tantas cosas diferentes que ya no hay ningún matemático que conozca todo lo que hacen todos sus colegas.

Los nombres de las ramas de las matemáticas modernas: Variedades Diferenciales, Topología Algebraica, Algebra Topológica, etc. suenan más misteriosos aún que los de la Física o la Biología.

Todo nació del deseo y la necesidad de saber cada vez más sobre los números, las figuras geométricas, y todas las relaciones entre estos objetos creados por la mente humana.

Parece mentira que cosas aparentemente tan sencillas como uno, dos, tres,... hayan tenido ocupados a tantos hombres de genio durante tantos siglos, y que cada vez haya más gente que se ocupe de eso, y que cada vez aparezcan más problemas de que ocuparse, pero ya veremos poco a poco cómo eso es posible y natural.

Los matemáticos actuales, sin embargo, pocas veces hablan de números o figuras; muchas más hablan de las relaciones mismas. Así, además de verificar que el 2 está antes que el 5 se preguntan que es ordenar objetos cualesquiera; además de dar la fórmula para la superficie de un círculo estudian qué es medir conjuntos en general. Se dice que plantean problemas más generales, más abstractos.

Y para estudiar estos problemas siguen un método especial, pero que es el mismo que usamos cuando jugamos a las damas, al ajedrez o a otro juego cualquiera: decir cuales son las piezas del juego, dar reglas para usarlas, y luego moverlas sin hacer trampas. Esto basta para dar una idea de lo que es el famoso método axiomático. Al usarlo lo entenderemos mejor; veremos que los axiomas son como las reglas del juego, que razonar es como mover las piezas y que los teoremas nos dicen cual es el efecto de hacer varias jugadas.

Para usar este método fue indispensable poder decir las cosas de manera que no pudiese haber confusiones. Todas las palabras debían ser definidas con exactitud, todos los razonamientos debían ser claros, evidentes. Eso obligó a introducir símbolos especiales (como se hace también para describir una partida de ajedrez) para poder resumir en forma sencilla y exacta lo que iba diciendo, y la verdad es que, recién cuando se empezaron a usar símbolos de todas clases, pudo la Matemática ir más allá de lo que habían descubierto los griegos y otros pueblos e la Antigüedad. Los símbolos y fórmulas no tienen ninguna virtud mágica o misteriosa, simplemente permiten decir en un renglón cosas que llenarían páginas. Pero sólo gracias a esos resúmenes perfectos que son las fórmulas pudieron los hombres pensar en cosas cada vez más complicadas sin hacerse un embrollo de ideas. Este método y este lenguaje matemático han resultado para las demás ciencias tan importantes como los mayores descubrimientos. En efecto, el lenguaje que aprendemos tan trabajosamente en nuestra infancia, y que es lo primero que nos diferencia totalmente de los animales , se fue creando cuando las necesidades del hombre eran sencillas y sus ideas del mundo limitadas e ingenuas. Mano, dolor, mamá, uno, muchos, son palabras que existen en todos los idiomas y que comprendemos desde muy temprana edad. Con palabras como ésas el hombre se las arregló durante muchos milenios para describir lo que veía y sentía, para dar explicaciones e instrucciones simples, y hasta para crear el arte literario.

Cierto es que pronto empezaron las confusiones y se vio la necesidad de definir ciertos términos prácticos , como las unidades para medir y pesar, o los deberes y derechos de los individuos. Aquí se empezó a notar que algunas definiciones eran fáciles de darse a gusto de todos, pero muchas, no (crimen, libertad, tirano), y algunos conceptos no producían más que interminables discusiones filosóficas (bien, ser, materia, infinito). Pero a pesar de esto, el lenguaje ordinario era suficiente para todos.

La cosa empezó a cambiar hace apenas unos 300 años: sin duda el ejemplo más importante de la necesidad de un nuevo lenguaje fue la explicación del movimiento de los planetas que dio la teoría de Newton. Sin el lenguaje matemático la teoría de Newton no podría haberse hecho y nuestra civilización basada en la ciencia no existiría. Las leyes de la Mecánica no se pueden expresar de la manera a que estamos acostumbrados en nuestra vida cotidiana, sino por fórmulas matemáticas.

Ahora ya no nos llama la atención que los hombres estudien y usen cosas que nada tiene que ver con la experiencia común, como por ejemplo los átomos, los genes, las galaxias, o cosas que por su complicación parecían inatacables, como la vida, la inteligencia, la sociedad, o que requieren una precisión mucho mayor que la de la mano o el ojo, como los satélites, las computadoras, los microscopios, la televisión.

Todo esto ha resultado de razonar, de usar el pensamiento

Pero con el lenguaje común no es posible hacer los razonamientos complicadísimos y rigurosos que hacen falta para descubrir las ondas de la radio o la energía atómica. Para eso fue preciso usar la Matemática: ciencia y lenguaje de la ciencia

Oscar Varsavsky

CAPITULO 1

NOCIONES ELEMENTALES DE LÓGICA MATEMATICA

Estudiaremos brevemente un lenguaje no contradictorio ni ambivalente que nos permitirá introducirnos a la Matemática: la Lógica Matemática, que estudia las leyes que regulan el razonamiento.

Por fines didácticos la dividimos en:

a) lógica proposicional
b) lógica funcional

1.1 LÓGICA PROPOSICIONAL

En la lógica proposicional consideraremos dos elementos básicos: *Proposiciones, Conectivos.*

1.1.1 Proposiciones :

Son "frases" sobre las cuales podemos decidir, unívocamente, sobre la verdad(V) o falsedad(F) de ellas.

Así entonces, una proposición es una frase que es V o F, no existiendo la posibilidad de obtener ambas decisiones conjuntamente (Principio del tercero excluido).

Las proposiciones las denotamos por letras minúsculas p, q, r, etc. , que resumirán, en si mismo, el significado particular que tengan al interior de una situación concreta.

Ejemplo:

1) "p" resumirá, al interior de éste ejemplo, a la proposición : "Hoy es Martes 10 de Mayo", y denotamos p: "Hoy es Martes 10 de Mayo"

2) Las siguientes "frases" son proposiciones:
   q : $x + 4 = 9$ y $x = 5$ (es V)
   r: Si x es un número real, entonces su cuadrado es no negativo (es V)

Observación :

No son proposiciones los interrogativos y los imperativos

1.1.2 Conectivos

Símbolos que, junto con las proposiciones básicas, nos permiten crear nuevas proposiciones; son :

$\sim$ **: se lee "no"**
$\wedge$ **: se lee "y"**
$\vee$ **: se lee " y/o"**
$\Rightarrow$ **: se lee " ...implica ..." ó "si, ...entonces, ..."**
$\Leftrightarrow$ **: se lee " ... equivalente con ...."**

Observación:

El conectivo “$\sim$ ” se usa antes de una proposición, y los restantes conectivos se usan entre dos proposiciones.

Ejemplo :

Si p, q, r son proposiciones, entonces también son proposiciones:

1) $\sim p$ 2) $p \wedge q$ 3) $p \vee q$ 4) $p \Rightarrow q$

5) $p \Leftrightarrow q$ 6) $p \wedge (q \vee r)$ 7) $[(\sim p) \wedge (q \vee r)] \Rightarrow q$

1.1.3 Tablas de verdad

Las proposiciones compuestas, es decir, aquellas que contienen al menos un conectivo, tienen, naturalmente, un valor veritativo, y para las proposiciones compuestas básicas ese valor veritativo lo damos en las siguientes “tablas de verdad”:

1.1.3.1 Tabla de verdad de la negación ($\sim$)

Dada la proposición básica "p" , existe la negación de ella, denotada $\sim p$, que se lee “no p”, proposición que tiene la siguiente tabla de verdad.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Observación:

Es claro que el valor veritativo de $\sim$ p es el contrario de p

Por ejemplo, si "p" es : p : “ Hoy llueve “, entonces $\sim p$ es : $\sim p$: “ Hoy no llueve “;

1.1.3.2 Tabla de verdad de la conjunción ($\wedge$)

Dadas las proposiciones "p" , "q", existe la conjunción de ellas, denotada $p \wedge q$, que se lee “p y q”, proposición tal que su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Observación:

La conjunción es verdadera sólo si las proposiciones que la componen lo son.

1.1.3.3 Tabla de verdad de la disyunción ($\vee$)

Dadas las proposiciones "p" , "q", existe la disyunción de ellas, denotada $p \vee q$ que se lee “p o q”, proposición tal que su tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Observación:

1) La disyunción es verdadera siempre, menos cuando las proposiciones que la componen son ambas falsas.

2) La disyunción presentada es incluyente, es decir, admite como verdadera a la proposición cuando ambas proposiciones que la componen lo son, sin embargo, si deseamos la disyunción excluyente, la denotamos $p \underline{\vee} q$

1.1.3.4 Tabla de verdad de la implicación ($\Rightarrow$)

Dadas las proposiciones "p" , "q", existe la implicación de p con q, denotada $p \Rightarrow q$, que se lee "p implica q" ó "si ocurre p, entonces ocurre q", proposición tal que su tabla de verdad es:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observación:

La implicación es verdadera siempre, menos cuando el *antecedente* es verdadero y el *consecuente* es falso.

1.1.3.5 Tabla de verdad de la equivalencia ($\Leftrightarrow$)

Dadas las proposiciones "p" , "q", existe la equivalencia de p con q, denotada $p \Leftrightarrow q$, que se lee "p equivalente q" ó " p si y solo si q", proposición tal que su tabla de verdad es:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Observación:

Resulta natural que la equivalencia sea verdadera cuando las dos proposiciones que la componen tienen el valor el mismo valor veritativo:

Ejemplo :

1) Determine el valor veritativo de: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$

Solución :

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

2) Determine el valor veritativo de: $[p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow r$

Solución :

Su tabla de verdad es:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$[p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow r$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V
F	F	F	F	F	V

Observación :

En el ejemplo anterior, dado que consideramos tres proposiciones básicas, el total de variaciones de tres elementos, cada uno con respuestas dicotómica (grupos con tres elementos donde interesa el orden) es $2^3 = 8$. Si son 4 las proposiciones básicas entonces el total de variaciones, en estas condiciones, es $2^4 = 16$.

1.1.4 Tautología, Contradicción, Contingencia

1.1.4.1 Tautología

Definición

Una proposición compuesta que siempre es verdadera, es una *tautología*. Una tautología la denotamos por I.

Ejemplos :

1) Demuestre que: $p \vee (\sim p)$ es tautología.

Demostración:

Debemos encontrar su tabla de verdad y verificar que siempre es verdadera:

p	$\sim p$	$p \vee (\sim p)$
V	F	V
F	V	V

Notamos que si "p" significa, "Esta sala tiene 40 alumnos" entonces $p \vee (\sim p)$ significa "Esta sala tiene 40 alumnos o no tiene 40 alumnos", lo que siempre verdadero.

2) Demuestre que: $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$ es tautología.

Demostración:

Su tabla de verdad es:

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$	$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$
V	F	V	V
F	V	F	V

3) Demuestre que: $\{p \Rightarrow [(q \wedge (\sim q)]\} \Rightarrow (\sim p)$ es tautología

Demostración:

Su tabla de verdad es:

p	q	$\sim q$	$q \wedge (\sim q)$	$p \Rightarrow [q \wedge (\sim q)]$	$\sim p$	$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V

Esta proposición se llama "método de demostración por reducción al absurdo"

1..1.4.2 Contradicción

Definición

Una proposición que siempre es falsa, es una *contradicción*. Una contradicción la denotamos por 0.

Ejemplo.

Demuestre que $p \wedge (\sim p)$ es una contradicción.

Demostración

Debemos encontrar la tabla de verdad de la proposición y verificar que siempre es falsa

p	$\sim p$	$p \wedge (\sim p)$
V	F	F
F	V	F

1.1.4.3 Contingencia

Definición

Una proposición que no es tautología ni contradicción se llama *contingencia*.

Ejemplo:

Demuestre que $\left[p \wedge (q \vee r)\right] \Rightarrow r$ es una contingencia

Solución:

Su tabla de verdad es:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$\left[p \wedge (q \vee r)\right] \Rightarrow r$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V
F	F	F	F	F	V

Concluimos que $\left[p \wedge (q \vee r)\right] \Rightarrow r$ es una contingencia.

1.1.5 LEYES FUNDAMENTALES DEL ALGEBRA DE PROPOSICIONES

Identidad	$p \wedge I \Leftrightarrow p$	$p \vee 0 \Leftrightarrow p$
	$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	$p \vee I \Leftrightarrow I$
Idempotencia	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	$p \vee p \Leftrightarrow p$
Involución	$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$	
Complemento	$\sim 0 \Leftrightarrow I$	$\sim I \Leftrightarrow 0$
	$p \wedge (\sim p) \Leftrightarrow 0$	$p \vee (\sim p) \Leftrightarrow I$
Conmutatividad	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Asociatividad	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	
	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	
Distributividad	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

De Morgan $\quad \sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$$

Observación.
Una ley fundamental, muy importante es: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee q)$

Ejemplos:

1) Si definimos ∇ y Δ como: $p \nabla q = (\sim p) \wedge (\sim q)$: $p \Delta q = (\sim p) \vee (\sim q)$, demuestre, sin usar tablas de verdad que:

a) $p \nabla p \Leftrightarrow \sim p$

b) $p \wedge q \Leftrightarrow \sim (p \Delta q)$

c) $p \vee q \Leftrightarrow \sim (p \nabla q)$

Demostración:

a) $p \nabla p \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim p) \Leftrightarrow \sim p$

b) $\sim (p \Delta q) \Leftrightarrow \sim [(\sim p) \vee (\sim q)] \Leftrightarrow \sim (\sim p) \wedge \sim (\sim q) \Leftrightarrow p \wedge q$

c) $\sim (p \nabla q) \Leftrightarrow \sim [(\sim p) \wedge (\sim q)] \Leftrightarrow \sim (\sim p) \vee \sim (\sim q) \Leftrightarrow p \vee q$

2) Sin usar tablas de verdad, demuestre que: $p \vee [(\sim p) \wedge q] \Leftrightarrow p \vee q$

Demostración:

$$p \vee [(\sim p) \wedge q] \Leftrightarrow [p \vee (\sim p)] \wedge [p \vee q] \Leftrightarrow \mathrm{I} \wedge [p \vee q] \Leftrightarrow p \vee q$$

3) Demuestre que: $p \Rightarrow (p \vee q)$ es una tautología

Demostración:

$$[p \Rightarrow (p \vee q)] \Leftrightarrow [\sim p \vee (p \vee q)] \Leftrightarrow [(\sim p \vee p) \vee q] \Leftrightarrow \mathrm{I} \vee q \Leftrightarrow \mathrm{I}$$

4) Demuestre que: $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ es una tautología

Demostración:

$$\{[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q\} \Leftrightarrow \sim [p \wedge (p \Rightarrow q)] \vee q \Leftrightarrow \sim \{p \wedge [(\sim p) \vee q)]\} \vee q$$

$$\Leftrightarrow \{(\sim p) \vee \sim [(\sim p) \vee q)]\} \vee q \Leftrightarrow \{(\sim p) \vee [p \wedge (\sim q)]\} \vee q$$

$$\Leftrightarrow \{[(\sim p) \vee p] \wedge [(\sim p) \vee (\sim q)]\} \vee q \Leftrightarrow \{[I \wedge [(\sim p) \vee (\sim q)]\} \vee q$$

$$\Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)] \vee q \Leftrightarrow (\sim p) \vee [(\sim q) \vee q] \Leftrightarrow \sim p \vee I \Leftrightarrow I$$

5) Demuestre, sin usar tablas: $\{[(p \wedge q) \vee r] \wedge \sim q\} \vee q \Leftrightarrow (r \vee q)$

Demostración

$$\begin{aligned}
\{[(p \wedge q) \vee r] \wedge \sim q\} \vee q &\Leftrightarrow \{[(p \wedge q) \wedge \sim q] \vee (r \wedge \sim q)\} \vee q \\
&\Leftrightarrow \{[p \wedge (q \wedge \sim q)] \vee (r \wedge \sim q)\} \vee q \\
&\Leftrightarrow \{[p \wedge 0] \vee (r \wedge \sim q)\} \vee q \\
&\Leftrightarrow \{0 \vee (r \wedge \sim q)\} \vee q \\
&\Leftrightarrow (r \wedge \sim q) \vee q \\
&\Leftrightarrow (r \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \\
&\Leftrightarrow (r \vee q) \wedge I \Leftrightarrow r \vee q
\end{aligned}$$

1.2 Lógica Funcional

1.2.1 Cuantificadores

Consideramos la siguiente frase: “x es un número par”. Claramente esta frase no es proposición; es una fórmula proposicional y la denotamos por $p(x)$:“x es un número par”.

¿Cómo transformar una fórmula proposicional (FP) a proposición?

1) Reemplazando ”x” por un elemento determinado de un conjunto especifico D, llamado Dominio de la variable x. Así, si para esta FP, D es el conjunto cuyos elementos son: 1,2,3,4, entonces:

$p(1)$: 1 es un número par, que es una proposición, ya que p(1) es falso.

$p(2)$: 2 es un número par, que es una proposición, ya que p(2) es verdadero.

2) Anteponiendo a la FP un símbolo que responde a la pregunta ¿Cuántos elementos de D verifican $p(x)$?

Estos símbolos, llamados Cuantificadores, son:

$\forall$ **: significa : “todos”**

$\exists$ **: significa : “algunos”**

$\exists!$ **: significa : “un único”**

Ejemplo:

1) $\forall$ x de D: $p(x)$ se lee: “todos los elementos de D son números pares” y , claramente es una proposición, ya que es falsa.
2) $\exists$ x de D: $p(x)$ se lee: “algún elemento de D es un número par”, y es una proposición, ya que es verdadera.
3) $\exists!$ x de D: $p(x)$ se lee: “un único elemento de D es un número par”, y claramente es una proposición, ya que es falsa.

Observación:

Adelantándonos, escribiremos: $\forall\ x \in D : p(x)$ en lugar de $\forall$ x de $D : p(x)$

1.2.2 Leyes de la cuantificación.

Se cumple:

1) $\sim [\forall\, x \in D : p(x)] \Leftrightarrow \exists\ x \in D : \sim p(x)$

2) $\sim [\exists\, x \in D : p(x)] \Leftrightarrow \forall\ x \in D : \sim p(x)$

Demostración:

1)

Si $\sim [\forall\ x \in D : P(x)]$ es V entonces $\forall\ x \in D : p(x)$ es F, luego $\exists\ x \in D : \sim p(x)$ es V

Si $\sim [\forall\ x \in D : P(x)]$ es F entonces $\forall\ x \in D : p(x)$ es V de donde $\exists\ x \in D : \sim p(x)$ es F

Por lo anterior concluimos que $\sim [\forall\ x \in D : p(x)] \Leftrightarrow \exists\ x \in D : \sim p(x)$ es tautología

2)

Si $\sim [\exists\ x \in D : P(x)]$ es V $\Rightarrow \exists\, x \in D : p(x)$ es F $\Rightarrow \forall\ x \in D : \sim p(x)$ es V

Si $\sim [\exists\ x \in D : P(x)]$ es F $\Rightarrow \exists\, x \in D : p(x)$ es V $\Rightarrow \forall\ x \in D : \sim p(x)$ es F

Así entonces: $\sim [\exists\ x \in D : p(x)] \Leftrightarrow \forall\ x \in D : \sim p(x)$ es una tautología

Ejemplo:

Se define, para los conjuntos A y B, la noción de “subconjunto”, denotado:
$A \subseteq B$ como : $A \subseteq B \Leftrightarrow [\forall\ x :\ x \in A \Rightarrow x \in B]$

Determine en que condiciones A no es subconjunto de B

Notación: $\sim (A \subseteq B) = A \not\subset B$

Solución:

Como $A \subseteq B \Leftrightarrow [\forall\ x :\ x \in A \Rightarrow x \in B]$ entonces:

$$\begin{aligned} A \not\subset B &\Leftrightarrow \sim [\forall\ x :\ x \notin A \vee x \in B] \\ &\Leftrightarrow \exists\ x : \sim (x \notin A \vee x \in B) \\ &\Leftrightarrow \exists\ x : x \in A \wedge x \notin B \end{aligned}$$

CAPITULO 2

NOCIONES BASICAS DE TEORIA DE CONJUNTOS

2.1 Nociones primitivas

Consideraremos tres nociones primitivas: conjunto, elemento y pertenencia

Conjunto :

Colección, grupo de objetos o cosas. Por ejemplo, el conjunto formado por los "objetos" 1, a, casa.

Denotaremos a los conjuntos con letras mayúsculas A, B etc., así, A es el conjunto formado por los elementos: 1, a, casa.

Elemento :

Cualquier objeto o cosa en el conjunto. Los denotamos con letras minúsculas y al elemento genérico lo denotamos x.

Pertenencia :

Denotado por el símbolo $\in$ relaciona las dos nociones primitivas anteriores. Si el elemento 1 esta en el conjunto, anotamos: 1 $\in$ A y se lee: "el elemento 1 pertenece al conjunto A" o simplemente "1 esta en A".

Si el elemento x no pertenece al conjunto A, denotamos: x $\notin$ A.

Conjuntos por extensión y por comprensión

Un conjunto está descrito por *extensión* cuando exhibimos a todos sus elementos encerrados en un paréntesis de llave, así por ejemplo, $\mathrm{A}=\{2,3,4\}$.

Un conjunto está descrito por *comprensión* cuando declaramos una propiedad que la cumplen solo y solo los elementos del conjunto, por ejemplo, el conjunto A $=\{2,3,4\}$ escrito por comprensión es: $\mathrm{A}=\{x / x\in N / 1<x<5\}$. Naturalmente que también podemos anotarlo: A $=\{x / x\in N / 2\le x\le 4\}$, $\mathrm{A}=\{x / x\in N / 1<x\le 4\}$, ó $\mathrm{A}=\{x / x\in N / 2\le x<5\}$ etc.

2.2 Igualdad de conjuntos

Definición:

Sea A y B conjuntos, decimos que A es subconjunto de B, lo que anotamos $A\subseteq B$ si y solo si "todos los elementos de A son también elementos de B"

$$\boldsymbol{A\subseteq B \Leftrightarrow \left[\forall x : x\in A \Rightarrow x\in B\right]}$$

Ejercicios:
1) Demuestre que: $\boldsymbol{A \subseteq A} \quad \forall \boldsymbol{A}$ (propiedad refleja)
Demostración:
Como : $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in A$, concluimos que $A \subseteq A$

2) Demuestre que: $\boldsymbol{[A \subseteq B \wedge B \subseteq C] \Rightarrow A \subseteq C} \quad \forall \boldsymbol{A, B, C}$ (transitividad)
Demostración:

$$\boldsymbol{[A \subseteq B \wedge B \subseteq C] \Rightarrow [\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B] \wedge [\forall x : x \in B \Rightarrow x \in C]}$$

$$\Rightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C,$$

de donde $\boldsymbol{A \subseteq C}$

Observación:
A no es subconjunto de B, lo que denotamos $A \not\subset B$ si y solo si "existe algún elemento en A que no está en B" es decir:

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x : x \in A \wedge x \notin B$$

Definición:
Decimos que los conjuntos A y B son iguales, lo que denotamos A = B si y sólo si "todos los elementos de A son elementos de B y todos los elementos de B son elementos de A, es decir:

$$\boldsymbol{A = B \Leftrightarrow [\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B] \wedge [\forall x : x \in B \Rightarrow x \in A] \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A}$$

2.3 ALGUNOS CONJUNTOS IMPORTANTES:

1) Conjunto vacío

Sea A un conjunto, entonces $\boldsymbol{\{x / x \in A \wedge x \notin A\}}$ es un conjunto que no tiene elementos, lo anotamos $\emptyset_{\boldsymbol{A}}$ y es el conjunto "vacío de A".

Proposición:

$\emptyset_{\boldsymbol{A}} \subseteq \boldsymbol{A} \quad \forall \boldsymbol{A}$

Demostración:
La realizaremos por reducción al absurdo
Supongamos que $\emptyset_{\boldsymbol{A}}$ no es subconjunto de A, entonces $\exists \boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \emptyset_{\boldsymbol{A}} \wedge \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}$, esto constituye una contradicción ya que el conjunto $\emptyset_{\boldsymbol{A}}$ no tiene elementos, entonces debe ocurrir que $\emptyset_{\boldsymbol{A}} \subseteq \boldsymbol{A}$.

Proposición:

$\emptyset_{\boldsymbol{A}} = \emptyset_{\boldsymbol{B}} \quad \forall \boldsymbol{A, B}$

Demostración:

Se debe demostrar que 1) $\emptyset_A \subseteq \emptyset_B$ y 2) $\emptyset_B \subseteq \emptyset_A$

1) Así es, ya que si no es cierto, es decir, si $\emptyset_A$ no es subconjunto de $\emptyset_B$, debe existir al menos un elemento que pertenezca a $\emptyset_A$ y que no está en $\emptyset_B$; esto es una contradicción, por lo que $\emptyset_A \subseteq \emptyset_B$
2) De manera análoga, $\emptyset_B \subseteq \emptyset_A$

Por 1) y 2) concluimos que $\emptyset_A = \emptyset_B$

Observación:

Como todos los "vacíos " son iguales, denotamos simplemente: $\emptyset$

2) **Conjunto Unitario**

Es aquel conjunto que tiene un único elemento. Se lee como, el unitario del elemento.

Ejemplo:

$\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} / \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{N}, 3 < \boldsymbol{x} < 5\} = \{4\}$ se lee "el unitario del 4"

Conjunto Universal U

Se puede demostrar que no existe un conjunto universo que contenga a todos los conjuntos (Paradoja de Russel), en cambio existe un conjunto universo de referencia, denotado U. Así por ejemplo, para los conjuntos $\boldsymbol{A} = \{2,3,4\}$, $\boldsymbol{B} = \{2,4,6,9\}$, el conjunto universal podría ser $\boldsymbol{U} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

2.4 OPERACIONES CON CONJUNTOS

2.4.1 Unión de conjuntos

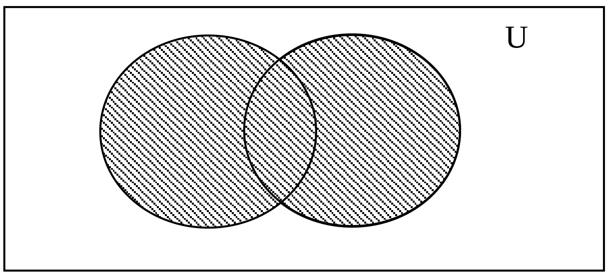
Definición:

Sean A y B conjuntos en U, definimos la unión de A con B, denotada $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ que se lee "A unión B" como el conjunto tal que:

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} / \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}$$

Observación

1) En un diagrama de Venn-Euler tenemos



$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$

2) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{Q} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}$
$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{N} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M} \cup \boldsymbol{N}$

Propiedades:

1) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \quad \forall \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{U}$ (Idempotencia)
2) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A} \quad \forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{U}$ (Conmutatividad)
3) $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) \quad \forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{U}$ (Asociatividad)
4) $A \cup \phi = A \quad , \quad A \cup U = U \quad ; \forall A \in U$
5) $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$

Demostración:
1) Se debe demostrar que: a) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A}$ y b) $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A}$

a) Sea $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A}$, debemos demostrar que $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$. Veámoslo

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, luego $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A}$

b) Sea $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, debemos demostrar que $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A}$, luego $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A}$

2) Se debe demostrar que: a) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}$ y b) $\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$

a) Sea $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$, debemos demostrar que $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}$ de donde

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}$

b) Sea $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}$, debemos demostrar que $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ de donde
$\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$

Por a) y b) concluimos que $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}$
Notemos el uso de la tautología : $p \Leftrightarrow q \vee p$

3) Por demostrar que: a) $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})$ y
b) $\boldsymbol{A} \bigcup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) \subseteq (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C}$

a) Sea $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C}$, debemos demostrar que $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})$

$\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C} \Rightarrow (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}) \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}$
$\Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \vee (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}) \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})$

Concluimos que $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$

b) Sea $\boldsymbol{x \in A \cup (B \cup C)}$, debemos demostrar que $\boldsymbol{x \in (A \cup B) \cup C}$

$\boldsymbol{x \in A \cup (B \cup C) \Rightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)}$

$\boldsymbol{\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B \cup C)}$

Concluimos que $\boldsymbol{A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C}$

Por a) y b) obtenemos $\boldsymbol{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$
Usamos la tautología : $\boldsymbol{(p \vee q) \vee r \Rightarrow p \vee (q \vee r)}$

5) Se debe demostrar que a) $\boldsymbol{A \cup B \subseteq B}$ y que b) $\boldsymbol{B \subseteq A \cup B}$

a. Sea $\boldsymbol{x \in A \cup B}$, debemos demostrar que $\boldsymbol{x \in B}$
$\boldsymbol{x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B}$. Si $\boldsymbol{x \in A \Rightarrow x \in B}$ (por hipótesis $\boldsymbol{A \subseteq B}$)
Si $\boldsymbol{x \in B \Rightarrow x \in B}$; esto indica que en todo caso $\boldsymbol{x \in B}$, de donde $\boldsymbol{A \cup B \subseteq B}$

b. Sea $\boldsymbol{x \in B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B}$, así $\boldsymbol{B \subseteq A \cup B}$
Por a) y b): $\boldsymbol{A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B}$
En la parte b) de la demostración usamos la tautología: $\boldsymbol{p \Rightarrow q \vee p}$

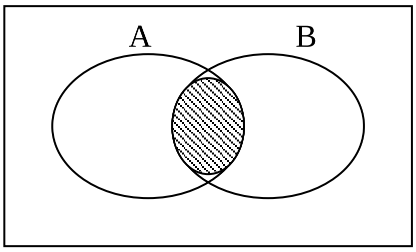
2.4.2 Intersección de conjuntos

Definición:

Sean A y B conjuntos en U, definimos la intersección de A con B, denotada $\boldsymbol{A \cap B}$, que se lee "A intersección B" como el conjunto tal que: $\boldsymbol{A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}}$

Observación:

1) En un diagrama de Venn-Euler tenemos



$\boldsymbol{A \cap B}$

2) $x \in P \cap Q \Rightarrow x \in P \wedge x \in Q$
$x \in M \wedge x \in N \Rightarrow x \in M \cap N$

Propiedades:

1) $A \cap A = A \quad \forall A \in U$ (Idempotencia)
2) $A \cap B = B \cap A \quad \forall A, B \in U$ (Conmutatividad)
3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad \forall A, B, C \in U$ (Asociatividad)
4) $A \cap \phi = \phi$, $A \cap U = A$; $\forall A \in U$
5) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

Demostración:

1) Se debe demostrar que: a) $A \cap A \subseteq A$ y b) $A \subseteq A \cap A$

a) Sea $x \in A \cap A$, debemos demostrar que $x \in A$. Veámoslo

$x \in A \cap A \Rightarrow x \in A \wedge x \in A \Rightarrow x \in A$, luego $A \cap A \subseteq A$

b) Sea $x \in A$, debemos demostrar que $x \in A \cap A$

$x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in A \Rightarrow x \in A \cap A$, luego $A \subseteq A \cap A$

Por a) y b) concluimos que $A \cap A = A$

Notemos el uso de la tautología: $p \Leftrightarrow p \wedge p$

2) Se debe demostrar que: a) $A \cap B \subseteq B \cap A$ y b) $B \cap A \subseteq A \cap B$

a) Sea $x \in A \cap B$,debemos demostrar que $x \in B \cap A$

$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B \wedge x \in A \Rightarrow x \in B \cap A$ de donde

$A \cap B \subseteq A \cap B$

b) Sea $x \in B \cap A$, debemos demostrar que $x \in A \cap B$

$x \in B \cap A \Rightarrow x \in B \wedge x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$ de donde

$B \cap A \subseteq A \cap B$
Por a) y b) concluimos que $A \cap B = B \cap A$

Notemos el uso de la tautología : $\boldsymbol{p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p}$

3) Por demostrar que: a) $\boldsymbol{(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)}$ y

b) $\boldsymbol{A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C}$

a) Sea $\boldsymbol{x \in (A \cap B) \cap C}$, debemos demostrar que $\boldsymbol{x \in A \cap (B \cap C)}$

$\boldsymbol{x \in (A \cap B) \cap C \Rightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C}$

$\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C$

Concluimos que $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$

b) Sea $x \in A \cap (B \cap C)$, se debe demostrar que $x \in (A \cap B) \cap C$

$x \in A \cap (B \cap C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \Rightarrow x \in A \cap B \wedge x \in C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C$

Concluimos que $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$

Por a) , b) se deduce que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4) Debe cumplirse que $A \cap \phi = \phi$ ya que si no es así, es decir, si $A \cap \phi \neq \phi$ entonces existe al menos un elemento en $A \cap \phi$. Esto constituye una contradicción dado que el conjunto vacío no tiene elementos.

5) Queda propuesto

2.4.3 Diferencia de conjuntos

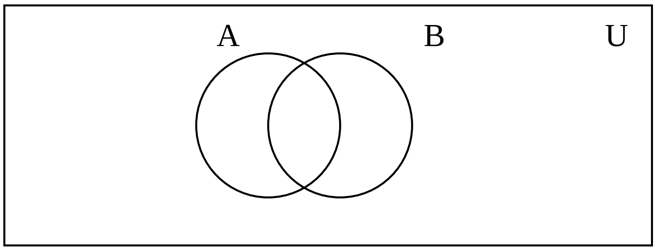
Definición:

Sean A y B conjuntos en U, definimos la diferencia de A con B, denotada $A-B$, que se lee "A menos B" como el conjunto tal que:

$$A-B=\{x\,/\,x\in A\wedge x\notin B\}$$

Observación:

1) En un diagrama de Venn-Euler tenemos:



A - B

2) $x\in P-Q\Rightarrow x\in P\wedge x\notin Q$
   $x\in M\wedge x\notin N\Rightarrow x\in M-N$

3) En general, la diferencia no es idempotente, es decir, $A-A\neq A$

   En general, la diferencia no es conmutativa, es decir, $A-B\neq B-A$

2.4.4 Complemento de un conjunto

Definición.

Sea A un conjunto en U, definimos el complemento de A, denotado A^C, que se lee "complemento de A", como el conjunto tal que:

$$A^C=\{x\,/\,x\notin A\wedge x\in U\}$$

Propiedades.

1) $(A^C)^C=A,\ \forall A\in U$
2) $U^C=\phi$
3) $\phi^C=U$
4) $A\subseteq B\Rightarrow B^C\subseteq A^C$

Demostración.

1) Debemos demostrar: a) $(A^C)^C\subseteq A$, b) $A\subseteq(A^C)^C$
   a) Sea $x\in(A^C)^C$, por demostrar que $x\in A$

$x \in (A^C)^C \Rightarrow x \notin A^C \Rightarrow x \in A$, asi, $(A^C)^C \subseteq A$

b) Sea $x \in A$, por demostrar que $x \in (A^C)^C$

$x \in A \Rightarrow x \notin A^C \Rightarrow x \in (A^C)^C$, asi, $A \subseteq (A^C)^C$

Por a) y b) concluimos que $(A^C)^C = A$

2) y 3) son inmediatas

4) Sea $x \in B^C$, debemos demostrar que $x \in A^C$ si $A \subseteq B$

$x \in B^C \Rightarrow x \notin B$, como $A \subseteq B$ entonces $x \notin A$ de donde $x \in A^C$

2.4.5 PROPIEDADES COMBINADAS

1) $A - B = A \cap B^C$
$A \cap A^C = \phi$
$A \cup A^C = U$

2) Distributividades
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3) Leyes de DeMorgan
$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Ejemplo
Usando propiedades de las operaciones de conjuntos demuestre, justificadamente:
$\left[(A \cap B^C)^C - (A \cup B)^C\right] \cup (A \cap B) = B$

Demostración

$$
\begin{aligned}
\left[(A \cap B^C)^C - (A \cup B)^C\right] \cup (A \cap B) &= \left[(A \cap B^C)^C \cap (A \cup B)\right] \cup (A \cap B) \\
&= \left[(A^C \cup B) \cap (A \cup B)\right] \cup (A \cap B) \\
&= \left[(A^C \cap A) \cup B\right] \cup (A \cap B) \\
&= (\phi \cup B) \cup (A \cap B) \\
&= B \cup (A \cap B) = B
\end{aligned}
$$

2.4.6 CARDINALIDAD

La Teoría de Conjuntos es la base teórica para explicar algunos fenómenos, en particular los aleatorios y allí nos interesa contar la cantidad de elementos en un subconjunto determinado.

Aceptaremos la siguiente afirmación.

" Si A y B son conjuntos disjuntos entonces la cantidad de elementos que tiene la unión de tales conjuntos es igual a la suma de la cantidad de elementos de los conjuntos"

Simbólicamente, si denotamos por n(M) la cantidad de elementos del conjunto M entonces

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \phi \text{ entonces } n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Observación.

Se puede demostrar (lo que queda propuesto) que:

a) Si A y B son conjuntos entonces: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

b) Si A y B son conjuntos entonces: $n(A \cap B^C) = n(A) - n(A \cap B)$

Ejemplo.

En una escuela, 150 alumnos han rendido 3 exámenes. De ellos, 60 aprobaron el primero, 70 el segundo y 50 alumnos el tercer examen; 30 aprobaron los dos primeros,25 el primero y el tercero, 15 el segundo y el tercero, además, 10 alumnos aprobaron los 3 exámenes:

¿Cuántos alumnos

a) aprobaron ningún examen?
b) aprobaron sólo el primer examen?
c) aprobaron sólo dos exámenes?
d) aprobaron sólo un examen?

Solución.

Consideremos los siguientes conjuntos.

$$A = \{\text{alumnos que aprueban el primer examen}\}$$

$$B = \{\text{alumnos que aprueban el segundo examen}\}$$

$$C = \{\text{alumnos que aprueban el tercer examen}\},$$

entonces los datos se pueden expresar como sigue:

$n(A)=60$, $n(B)=70$, $n(C)=50$, $n(A\cap B)=30$, $n(A\cap C)=25$, $n(B\cap C)=15$

$n(A\cap B\cap C)=10$, además, $n(U)=150$, con $U=\{\text{alumnos que rindieron examen}\}$

Solución.

a) Se pide $n(A^C\cap B^C\cap C^C)$

Como $n(A^C\cap B^C\cap C^C)=n\left[(A\cup B\cup C)^C\right]=n(U)-n(A\cup B\cup C)$ y además

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

$=60+70+50-30-25-15+10=120$ entonces

$n(A^C\cap B^C\cap C^C)=150-120=30$

b) Se pide $n(A\cap B^C\cap C^C)$

$n(A\cap B^C\cap C^C)=n\left[A\cap (B\cup C)^c\right]=n(A)-n\left[A\cap (B\cup C)\right]$

$=n(A)-n\left[(A\cap B)\cup (A\cap C)\right]=n(A)-\left[n(A\cap B)+n(A\cap C)-n(A\cap B\cap C)\right]$

$=60-(30+25-10)=15$

c) Se pide $n\left[(A\cap B\cap C^C)\cup (A\cap C\cap B^C)\cup (B\cap C\cap A^C)\right]$

$n\left[(A\cap B\cap C^C)\cup (A\cap C\cap B^C)\cup (B\cap C\cap A^C)\right]$

$=n\left[(A\cap B\cap C^C)\cup (A\cap C\cap B^C)\cup (B\cap C\cap A^C)\right]$

$=n(A\cap B\cap C^C)+n(A\cap C\cap B^C)+n(B\cap C\cap A^C)-n(\phi)-n(\phi)-n(\phi)+n(\phi)$

Como $n(A\cap B\cap C^C)=n(A\cap B)-n(A\cap B\cap C)=30-10=20$,

análogamente obtenemos $n(A\cap C\cap B^C)=15$, $n(B\cap C\cap A^C)=5$, de donde

$n\left[(A\cap B\cap C^C)\cup (A\cap C\cap B^C)\cup (B\cap C\cap A^C)\right]=20+15+5=40$

d) Se pide $n(A \cup B \cup C)$

e) Se pide $n\left[(A \cap B^C \cap C^C) \cup (B \cap A^C \cap C^C) \cup (C \cap A^C \cap B^C)\right]$

$n\left[(A \cap B^C \cap C^C) \cup (B \cap A^C \cap C^C) \cup (C \cap A^C \cap B^C)\right]$

$= n(A \cap B^C \cap C^C) + n(B \cap A^C \cap C^C) + n(C \cap A^C \cap B^C) - n(\phi) - n(\phi)$

$- n(\phi) + n(\phi)$

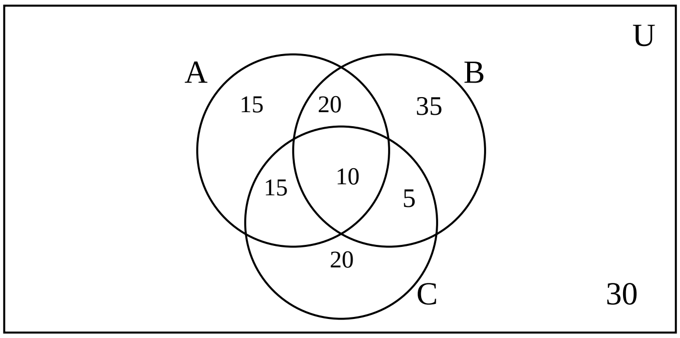
Como $n(A \cap B^C \cap C^C) = 15$, (problema b)) y procediendo análogamente

obtenemos $n(B \cap A^C \cap C^C) = 35$, $n(C \cap A^C \cap B^C) = 20$, de donde

$n\left[(A \cap B^C \cap C^C) \cup (B \cap A^C \cap C^C) \cup (C \cap A^C \cap B^C)\right] = 15 + 35 + 20 = 70$

Observación.

Usando un diagrama de Venn-Euler podemos solucionar el problema planteado:



El diagrama se construyó, iniciando el "llenado" desde el centro, es decir, desde

$n(A \cap B \cap C)$. Notemos que se puede leer inmediatamente que $n(B \cap A^C \cap B^C) = 35$

2.4.7 Ejercicios propuestos

1) Indique el valor veritativo de las siguientes proposiciones:

   a) Todo número natural es mayor que 2

   b) $(\forall x \in \Re)(\exists y \in \Re) : xy > 0$

   c) $\exists x \in N : x^2 > 100$

2) Use tablas de verdad para clasificar las siguientes proposiciones como: Tautología, Contradicción o Contingencia

   a) $\left[(p \vee q) \Rightarrow q\right] \Rightarrow (\sim p \vee q)$

   b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \left[(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)\right]$

   c) $\sim \left[(\sim p \Rightarrow q) \wedge \sim (p \wedge q)\right] \wedge q$

   d) $\left[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\right] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

3) Demuestre mediante Algebra de proposiciones:

   a) $\left[(p \vee q) \wedge \sim p\right] \Leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

   b) $\left[\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)\right] \Leftrightarrow \sim p$

   c) $\left[p \Rightarrow (q \wedge r)\right] \Leftrightarrow \left[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)\right]$

4) Usando los datos proporcionados en cada caso, obtenga el valor veritativo pedido:

   a) Si se sabe que: $p \wedge q$ es V y además $r \wedge p$ es F, determine el valor de $(r \vee q) \Rightarrow (r \wedge q)$ Resp. F

   b) Sabiendo que: $p \Rightarrow q$ es F, $r \wedge p$ es F, determine el valor veritativo de
      i) $p \Leftrightarrow r$ Resp. F
      ii) $\sim \left[p \wedge (\sim r)\right]$ Resp. F

   c) De la falsedad de $(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim r \Rightarrow s)$ deduzca el valor veritativo de
      i) $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim q)$ Resp. F

ii) $\left[(\sim r \vee q) \wedge q\right] \Leftrightarrow \left[(\sim q \vee r) \wedge s\right]$ Resp. F

iii) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow \left[(p \vee q) \wedge (\sim q)\right]$ Resp. V

5) Si $p \downarrow q$ significa " ni p y ni q" ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías?

a) $\left[(p \downarrow q) \downarrow (q \downarrow p)\right] \Leftrightarrow (p \vee q)$

b) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow p \downarrow q$

c) $(p \downarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$

d) $\sim (p \downarrow q) \Leftrightarrow p \vee q$

6) Sabiendo que la proposición compuesta $\sim p \underline{\vee} \left[q \Rightarrow (\sim r \vee \sim s)\right]$ es verdadera, determine el valor de verdad de $\left[\sim p \Rightarrow (\sim r \vee q)\right] \vee s$ Resp. V

7) Demuestre que cada uno de los siguientes argumentos es válido (es decir, que la proposición es una tautología) , usando el álgebra de proposiciones.

a) $\left[(p \Rightarrow q) \wedge p\right] \Rightarrow q$

b) $\left[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p)\right] \Rightarrow \sim p$

c) $\left[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\right] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

d) $\left[(p \vee q) \wedge (\sim p)\right] \Rightarrow q$

e) $(p \wedge q) \Rightarrow p$, $(p \wedge q) \Rightarrow q$

f) $p \Rightarrow (p \vee q)$

Además, identifique cada una de las siguientes "frases" con alguno de los argumentos anteriores

1) José tiene un cuaderno o un lápiz , José no tiene un cuaderno , por lo tanto, José tiene un lápiz
2) Si José gana el concurso entonces obtendrá una beca , José ganó el concurso, por lo tanto, José obtendrá la beca
3) Si José gana el concurso entonces obtendrá una beca , José no obtuvo la beca, por lo tanto, José no ganó el concurso
4) Todos los monos son desordenados, luego, los monos son desordenados o son peludos
5) Si no llueve entonces se perderá la cosecha, si se pierde la cosecha entonces no se podrá cancelar la deuda entonces , si no llueve, no se podrá cancelar la deuda
6) Ningún estudiante es ocioso y María es una excelente bailarina, luego, ningún estudiante es ocioso

8) Sean: $U = \{1,2,3,4,5,6,7,a,b,c,d,e,f,g,h\}$

$A = \{3,5,7,c,d\}$, $B = \{2,3,4,5,b,c,e\}$, $C = \{2,6,7,a,b,g\}$

Determine:

a) $(A \cup B^c) \cap (C - A)^C$

b) $(A \cap C) \cup (B - A^C)^C$

c) las operaciones para obtener
   i) $\{6,2,b\}$
   ii) $\{7\}$
   iii) $\{3,4,5,c,d,e\}$

9) Demuestre:

a) $A - B = A \cap B^C$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

c) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

10) Usando Algebra de Conjuntos, verifique si:

a) $(A - B) \cup (A - B^C) = A$

b) $B \cap \left[(B^C \cup A^C) \cup (A \cup B)^C\right] = B - A$

c) $\left[(A \cap B) \cup (A^C \cap B) \cup (A^C \cap B^C)\right] = A^C \cup B$

d) $A - \{A - [(A - B) \cup A]\} = A$

e) $[A - (A \cap B)] \cup [B - (A \cap B)] = \phi$

11) En un universo de 30 elementos se considera dos conjuntos A y B tales que:
$n(A \cap B) = 10$, $n(B) = 18$, $n(B^C \cap A) = 5$
Determine:
a) $n(B - A)$ b) $n(A)$ c) $n(A^C \cap B^C)$

Resp. a) 8 b) 15 c) 7

12) Demuestre que:
a) $n(A \Delta B) = n(A) + n(B) - 2\,n(A \cap B)$

b) $n((A\Delta B)\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap C)-n(B\cap C)-2n(A\cap B)+2n(A\cap B\cap C)$

13) En un universo U se considera tres conjuntos A,B,C tales que:

$A\cap C=\phi$, $n(A\cap B)=5$, $n(A^C)=25$, $n(C)=13$, $n(B-A)=15$

$n(B\cap C)=9$, $n(A\cup B\cup C)=27$

Determine:

a) $n(B)$ b) $n(A)$ c) $n(U)$

Resp. a) 20 b) 8 c) 33

14) En un universo de 45 elementos se considera tres conjuntos A,B,C tales que:

$A\cap C=\phi$, $B\cap C=\phi$, $n(A\cap B)=4$, $n(C-B)=10$, $n\left[(A\cup B\cup C)^C\right]=16$

$n(B-C)=12$

Calcule:

a) $n(A)$ b) $n(B)$ c) $n(B-A)$ d) $n\left[(B-A)-C\right]$

Resp. a) 11 b) 12 c) 8 d) 8

15) Una encuesta acerca de las preferencias de 180 personas sobre tres marcas A, B, C

arrojó los siguientes resultados:

$n\left[(B\cap C)-A\right]=25$, $n(A\cap B)=15$, $n\left[((A\cap B)-C)^C\right]=175$, $n(A-B)=50$

$n\left[C-(A\cup B)\right]=35$, $n\left[(A\cap C)-B\right]=20$, $n\left[(A\cup B\cup C)^C\right]=40$

Determine el número de personas que:

a) compran sólo B Resp. 15

b) compran sólo dos marcas Resp. 50

c) no compran de las marcas consultadas Resp. 40

CAPITULO 3

RELACIONES Y FUNCIONES

3.1 Definición y ejemplos

Definición

Sean A, B conjuntos, definimos el "par ordenado A coma B, denotado (A, B) como el conjunto $(A, B) = \{\{A\}, \{A, B\}\}$

Observación,

Al elemento A lo llamamos "primer elemento del par ordenado" o también "abscisa"

Al elemento B lo llamamos "segundo elemento del par ordenado" o también "ordenada"

Ejemplo.

Es evidente que $(2,3) = \{\{2\}, \{2,3\}\} \neq (3,2) = \{\{3\}, \{3,2\}\}$

Definición.

Sean A, B conjuntos, definimos el producto cartesiano de A con B denotado por $A \times B$, como el conjunto tal que $A \times B = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}$

Ejemplo.

Si $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$ entonces:

$A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$, $B \times A = \{(3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

Observación.

a) $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$
b) En general $A \times B \neq B \times A$
c) $A \times B = \phi \Leftrightarrow (A = \phi) \vee (B = \phi)$
d) $A \times B \neq \phi \Leftrightarrow (A \neq \phi) \wedge (B \neq \phi)$

Definición.

Sean A, B conjuntos, definimos una relación R de A a B como cualquier subconjunto de $A \times B$

Observación.

Nos interesan las relaciones que se determinan mediante cierta ley de formación así, una relación R de A a B es: $R \subseteq A \times B = \{(a, b) / p((a, b))\}$ donde $p((a, b))$ es una fórmula proposicional dada.

Ejemplo.

Considere los conjuntos $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, N; determine por extensión las siguientes relaciones:

a) $R_1 \subseteq A \times B = \{(a, b) / a + b \text{ es un número par}\}$
b) $R_2 \subseteq A \times B = \{(x, y) / x^2 + y^2 > 6\}$

c) $R_3 \subseteq N \times N = \{(a,b) / a + 2b = 15\}$

d) $R_4 = \left\{ (x,y) / \dfrac{\sqrt{\dfrac{2x+y}{3}}}{2} - 1 = 0 \right\}$

Solución.

Después de realizar $A \times B$ y $N \times N$ obtenemos:

$R_1 = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3.1),(3,3)\}$

$R_2 = \{(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$

$R_3 = \{(1,7),(3,6),(5,5),(7,4),(9,3),(11,2),(13,.1)\}$

$R_4 = \{(1,10),(2,8),(3,6),(4,4),(5,2)\}$

3.2 Dominio, Recorrido y Relación inversa

Definición.

Sea $R \subseteq A \times B = \{(a,b) / p((a,b))\}$ una relación, definimos:

a) Dominio de la relación R, denotado $Dom(R)$, al conjunto tal que
$Dom(R) = \{a \in A / \exists\, b \in B \text{ tal que } (a,b) \in R\}$

b) Recorrido de la relación R, denotado $\mathrm{Re}\,c(R)$, al conjunto tal que
$\mathrm{Re}\,c(R) = \{b \in B / \exists\, a \in A \text{ tal que } (a,b) \in R\}$

c) Relación inversa de R, denotada R^{-1}, al conjunto tal que
$R^{-1} \subseteq B \times A = \{(p,q) / (q,p) \in R\}$

Observación.

a) El dominio de una relación es el conjunto formado por las primeras componentes de los pares de la relación.
b) El recorrido de una relación es el conjunto formado por las segundas componentes de los pares de la relación.
c) La relación inversa de una relación R esta formada por los pares ordenados "recíprocos" de los pares ordenados de R

Ejemplo.

En el ejemplo anterior:

$Dom(R_1) = \{1,2,3\}$, $R_2^{-1} = \{(3,1),(4,1),(2,2),(3,2),(4,2),(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)\}$

Proposición.

$R \subseteq A \times B = \{(a,b) / p((a,b))\}$ una relación, entonces:

a) $(R^{-1})^{-1} = R$

b) $Dom(R) \subseteq A$, $\mathrm{Re}\,c(R) \subseteq B$

c) $Dom(R) = \mathrm{Re}\,c(R^{-1})$, $\mathrm{Re}\,c(R) = Dom(R^{-1})$

La demostración queda propuesta

3.3 Composición de relaciones

Definición.

Sean $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ dos relaciones, entonces existe la relación compuesta de R con S ,denotada $S \circ R$ tal que:

$$S \circ R = \{(x,z) / \exists\, y \in B \text{ tal que } (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$$

Ejemplos

1) Sean $R \subseteq A \times B = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,c)\}$, $S \subseteq B \times C = \{(a,x),(a,y),(b,y)\}$ dos relaciones con $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c,d,e\}$, $C = \{x,y,z,w,p\}$, entonces:

a) $S \circ R = \{(1,x),(1,y),(2,y)\}$

b) $(S \circ R)^{-1} = \{(x,1),(y,1),(y,2)\}$

c) $R^{-1} = \{(a,1),(b,2),(c,3),(c,4)\}$

d) $S^{-1} = \{(x,a),(y,a),(y,b)\}$

e) $R^{-1} \circ S^{-1} = \{(x,1),(y,1),(y,2)\}$

2) Sean $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ dos relaciones. Demuestre que $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

Demostración.

Debemos demostrar: a) $(S \circ R)^{-1} \subseteq R^{-1} \circ S^{-1}$ b) $R^{-1} \circ S^{-1} \subseteq (S \circ R)^{-1}$

a) Sea $(x,y) \in (S \circ R)^{-1}$ debemos demostrar que $(x,y) \in R^{-1} \circ S^{-1}$

$(x,y) \in (S \circ R)^{-1} \Rightarrow (y,x) \in S \circ R$

$\Rightarrow \exists\, m \in B$ tal que $(y,m) \in R \wedge (m,x) \in S$

$\Rightarrow \exists\, m \in B$ tal que $(x,m) \in S^{-1} \wedge (m,y) \in R^{-1}$

$\Rightarrow (x,y) \in R^{-1} \circ S^{-1}$

b) Sea $(a,b) \in R^{-1} \circ S^{-1}$ debemos demostrar que $(a,b) \in (S \circ R)^{-1}$

$(a,b) \in R^{-1} \circ S^{-1} \Rightarrow \exists\, n \in B$ tal que $(a,m) \in S^{-1} \wedge (m,b) \in R^{-1}$

$\Rightarrow \exists\, n \in B$ tal que $(b,m) \in R \wedge (m,a) \in S$

$\Rightarrow (b,a) \in S \circ R$

$\Rightarrow (a,b) \in (S \circ R)^{-1}$

3) Sean A,B,C conjuntos y $T \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ dos relaciones. Demuestre que $(R \cup S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cup (S \circ T)$

Demostración.

Sea $(a,b) \in (R \cup S) \circ T$, debemos demostrar que $(a,b) \in (R \circ S) \cup (S \circ T)$

$(a,b) \in (R \cup S) \circ T \Rightarrow \exists\, c \in B$ tal que $(a,c) \in T \wedge (c,b) \in R \cup S$

$\Rightarrow (a,c) \in T \wedge ((c,b) \in R \vee (c,b) \in S)$

$\Rightarrow ((a,c) \in T \wedge (c,b) \in R) \vee ((a,c) \in T \wedge (c,b) \in S)$

$\Rightarrow (a,b) \in R \circ T \vee (a,b) \in S \circ T$

$\Rightarrow (a,b) \in (R \circ T) \cup (S \circ T)$

4) Sea A un conjunto y considere las relaciones $R \subseteq A^2$ y $Id \subseteq A^2 = \{(x,y) / x = y\}$

Demuestre que $R \circ Id = R$

Demostración.

Debemos demostrar que: a) $R \circ Id \subseteq R$ b) $R \subseteq R \circ Id$

a) Sea $(x,z) \in R \circ Id$, debemos demostrar que $(x,z) \in R$
$(x,z) \in R \circ Id \Rightarrow \exists\, y \in A$ tal que $(x,y) \in Id \wedge (y,z) \in R$, pero
$(x,y) \in Id$ indica que $x = y$, así, $(x,z) \in R$

b) Sea $(x,z) \in R$, debemos demostrar que $(x,z) \in R \circ Id$
Sea $(x,z) \in R$, como $(x,x) \in Id$ entonces $(x,x) \in Id \wedge (x,z) \in R$, de esto último concluimos que $(x,z) \in R \circ Id$

3.4 Relaciones en un conjunto.

Definición.

Sea A un conjunto. Decimos que la relación R está definida en A si $R \subseteq A \times A$

Definición.

Sea R una relación definida en A, entonces:

a) R es relación refleja $\Leftrightarrow (a,a) \in R \;\; \forall a \in A$

b) R es relación simétrica $\Leftrightarrow (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R \;\; \forall (x,y) \in R$

c) R es relación transitiva $\Leftrightarrow \left[(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R\right] \Rightarrow (a,c) \in R \;\; \forall (x,y) \in R$

c) R es relación antisimétrica $\Leftrightarrow \left[(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R\right] \Rightarrow (a = b) \;\; \forall (x,y) \in R$

Observación.

a) Denotamos $R \subseteq A^2$ en lugar de $R \subseteq A \times A$

b) Si $(a,b) \in R$ podemos denotar aRb

c) R no es refleja $\Leftrightarrow \exists\, a \in A$ tal que $(\mathrm{a},\mathrm{a}) \notin \mathrm{R}$

d) R no es simétrica $\Leftrightarrow (a,b) \in R \wedge (b,a) \notin R$

e) R no es transitiva $\Leftrightarrow (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \wedge (a,c) \notin R$

f) R no es antisimétrica $\Leftrightarrow (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \wedge (a \neq b)$

Ejemplos

1) Sea $A = \{1,2,3\}$ y $R \subseteq A^2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),((1,3),(3,3)\}$

¿Es R una relación refleja, simétrica, transitiva, antisimétrica?

Solución.

Como $(a,a) \in R \;\; \forall\, a \in A$ entonces R es relación refleja

R no es simétrica ya que $(1,3) \in R \wedge (3,1) \notin R$

R es transitiva ya que se verifica la condición

R no es antisimétrica ya que $(1,2) \in R \wedge (2,1) \in R$ pero $1 \neq 2$

2) Sea R una relación en A. Demuestre: R es simétrica $\Leftrightarrow R = R^{-1}$
Demostración.
$\Rightarrow$) Si R es simétrica debemos demostrar que $R = R^{-1}$, es decir, debemos demostrar que
a) $R \subseteq R^{-1}$ b) $R^{-1} \subseteq R$

a) Sea $(x, y) \in R$ entonces como R es simétrica concluimos que $(y, x) \in R$, así, por definición de relación inversa conseguimos $(x, y) \in R^{-1}$, luego $R \subseteq R^{-1}$
b) Sea $(a,b) \in R^{-1}$ entonces $(b.a) \in R$ y como R es simétrica entonces $(a,b) \in R$; así, $R^{-1} \subseteq R$

Por a) y b) $R = R^{-1}$

$\Leftarrow$) Sabemos que $R = R^{-1}$, debemos demostrar que R es simétrica.
Sea $(a,b) \in R$ entonces $(b,a) \in R^{-1}$, como $R = R^{-1}$ entonces $(b,a) \in R$, así, R es simétrica.

3.5 Relación de orden y de equivalencia
3.5.1 Relación de equivalencia
Definición.
Decimos que la relación $R \subseteq A^2$ es una relación de equivalencia en A si y sólo si R es refleja, simétrica y transitiva

Ejemplos
1) En el conjunto de los números reales R definimos la relación S por: $aSb \Leftrightarrow \exists\, m \in Z$ tal que $a = b \cdot 3^{m+1}$. Demuestre que S es una relación de equivalencia.
Demostración.
Debemos demostrar que: a) S es refleja b) S es simétrica c) S es transitiva

a) Como S es refleja si y sólo si $aSa\ \forall a \in A$, es decir, si y sólo si $\exists\, m \in Z$ tal que $a = a \cdot 3^{m+1}$, entonces que la igualdad se verifica con $m = -1 \in Z$, concluimos que S es refleja
b) Si aSb entonces existe $m \in Z$ tal que $a = b \cdot 3^{m+1}$. Debemos demostrar que bSa, es decir, debemos demostrar que existe $m_1 \in Z$ tal que $b = a \cdot 3^{m_1+1}$.

Como $a = b \cdot 3^{m+1}$ entonces $b = a \cdot 3^{-m-1}$, de donde $b = a \cdot 3^{-(m+2)+1}$: si definimos $m_1 = -(m+2) \in Z$ concluimos que bSa.

c) Si $aSb \wedge bSc$ entonces existen $m_1, m_2 \in Z$ tal que $a = b \cdot 3^{m_1+1} \wedge b = c \cdot 3^{m_2+1}$; queremos demostrar que aSc, es decir, debemos demostrar que existe $m_3 \in Z$ tal que
$a = c \cdot 3^{m_3+1}$. Resulta natural reemplazar b en $a = b \cdot 3^{m_1+1}$ obteniendo $a = c \cdot 3^{m_2+1} \cdot 3^{m_1+1} = c \cdot 3^{(m_1+m_2+1)+1}$. El término m_3 buscado es $m_3 = m_1 + m_2 + 1 \in Z$

2) Sea R una relación definida en N^2 tal que $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow ad = bc$. Demuestre que R es una relación de equivalencia.
Demostración.

Debemos demostrar que:

a) R es refleja, es decir, $(a,b)R(a,b) \ \forall(\mathrm{a,b}) \in \mathrm{N}^2$
b) R es simétrica, es decir, $(a,b)R(c,d) \Rightarrow (c,d)R(a,b)$
c) R es transitiva, es decir, $[(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f)] \Rightarrow (a,b)R(e,f)$

a) $(a,b)R(a,b) \ \forall(\mathrm{a,b}) \in \mathrm{N}^2$ ya que $ab = ba$, luego, R es refleja

b) Si $(a,b)R(c,d)$ entonces $ad = bc$, si escribimos la igualdad precedente como $cb = da$ concluimos que, $(c,d)R(a,b)$, así, R es simétrica

c) Si $(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f)$ entonces $(ad = bc) \wedge (cf = de)$, debemos demostrar que $(a,b)R(e,f)$, es decir, que $af = be$

De la igualdad $ad = bc$, multiplicando por e obtenemos $ade = bce$, pero por hipótesis tenemos que $de = cf$, entonces, reemplazando de en $ade = bce$ obtenemos $acf = bce$ de donde, cancelando, concluimos que $af = be$.

3) Una relación R definida en A es *circular* si y sólo si $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow cRa$
Demuestre: R es de equivalencia si y solo si R es refleja y circular
Demostración.

$\Rightarrow$) Si R es de equivalencia debemos demostrar que R es refleja y circular
Basta demostrar que R es circular ya que R es de equivalencia
Sea $aRb \wedge bRc$ entonces, como R es de equivalencia, en particular es transitiva, así, $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$; como R es relación simétrica entonces, de la última expresión concluimos que cRa

$\Leftarrow$) Si R es refleja y circular debemos demostrar que R es de equivalencia
Falta demostrar que R es simétrica y transitiva
Sea aRb; como R es refleja entonces bRb, así tenemos, $aRb \wedge bRb$ de donde bRa; concluimos que R es simétrica

Sea $aRb \wedge bRc$ entonces, como R es circular conseguimos que cRa de donde, aRc ya que R es simétrica, así, R es transitiva.

3.5.2 Clases de equivalencia

Definición.

Sea R una relación de equivalencia definida en $A \neq \phi$.

Para todo $x \in A$ llamamos clase de equivalencia de x según R al conjunto C_x también denotado $\bar{x}$, formado por todos aquellos elementos relacionados con x, es decir:

$$\overline{x} = \{y \in A \,/\, yRx\}$$

Observación.

1) A la relación la podemos denotar por ~ .
2) Las clases de equivalencia son no vacías, es decir, $\overline{x} \neq \phi \;\; \forall x \in A$
3) Si $a, b \in \overline{x}$ entonces $a \sim x \wedge b \sim x$ de donde $a \sim b$, es decir, todos los elementos de una clase de equivalencia son equivalentes entre si. Con esto podemos representar la clase de equivalencia por uno de sus elementos.
4) $\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow x \sim y$

Definición.

El conjunto de las clases de equivalencia según R se llama conjunto cuociente de A por R. Se denota A/R

Proposición.

Sea R una relación de equivalencia definida en $A \neq \phi$, entonces A/R posee las siguientes propiedades:

a) $\forall\, \overline{x} \in A/R\,,\, \overline{x} \neq \phi$

b) $\overline{x} \in A/R \wedge \overline{y} \in A/R\,,\, \overline{x} \neq \overline{y}$ entonces $\overline{x} \cap \overline{y} = \phi$

c) $\bigcup\limits_{\overline{x} \in A/R} \overline{x} = A$

Demostración.

2) Supongamos $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \phi$, entonces existe $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$, así, $z \in \overline{x} \wedge z \in \overline{y}$; esto último nos indica que $zRx \wedge zRy$, luego, xRy, de donde $\overline{x} = \overline{y}$, esto constituye una contradicción (observación 3) así, $\overline{x} \cap \overline{y} = \phi$

3) $\forall x \in A, x \in \overline{x}$ luego $\{x\} \subseteq \overline{x} \subseteq A$, así, $A = \bigcup\limits_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup\limits_{\overline{x} \in A/R} \overline{x} \subseteq A$

Ejemplos.

1) Sea $A = \{\, a, b, c\}$ y $R \subseteq A^2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\}$ una relación de equivalencia. Determine:
   a) La clase de equivalencia de los elementos de A
   b) El conjunto cuociente

   Solución.

   a) $\overline{a} = \{x \in A \,/\, xRa\} = \{a\}$

      $\overline{b} = \{x \in A \,/\, xRb\} = \{b, c\}$

      $\overline{c} = \overline{b}$

   b) El conjunto cuociente es $A/R = \{\{a\},\{b,c\}\}$ y un sistema de representantes es $S = \{a, b\}$

2) En Z definimos la relación de equivalencia R por: $aRb \Leftrightarrow a^2 + a = b^2 + b$.
Determine:
a) La clase de equivalencia de los elementos de Z
c) El conjunto cuociente
Solución.
a) $\bar{0} = \{x \in Z / xR0\} = \{x \in Z / x^2 + x = 0\} = \{-1, 0\} = \overline{-1}$
$\bar{1} = \{x \in Z / xR1\} = \{x \in Z / x^2 + x = 1^2 + 1\} = \{x \in Z / x^2 + x - 2 = 0\} = \{1, -2\} = \overline{-2}$
$\bar{2} = \{x \in Z / xR2\} = \{x \in Z / x^2 + x = 2^2 + 2\} = \{x \in Z / x^2 + x - 6 = 0\} = \{2, -3\} = \overline{-3}$
$\bar{3} = \overline{-4}$,........., $\bar{n} = \{n, -(n+1)\} = \overline{-(n+1)}$

3.5.3 Relación de orden

Definición.
Una relación R definida en el conjunto A es una relación de *orden* si y sólo si es refleja, transitiva y antisimétrica

Ejemplos.
Son relaciones de orden las siguientes relaciones:
1) La relación $\leq$ definida en $\Re$
2) La relación $\subseteq$ en la familia de conjuntos $P(A) = \{X / X \subseteq A\}$, A un conjunto dado
3) La relación R definida en N por: $aRb \Leftrightarrow a$ divide a b, (se puede denotar por $a|b$)
En efecto

Como $aRb \Leftrightarrow \exists\, k \in N$ tal que $b = ka$ entonces:
R es refleja ya que $a|a$, esto último puesto que $a = 1 \cdot a$

R es transitiva ya que si $a|b \wedge b|c$ entonces $(\exists\, k_1 \in N$ tal que $b = k_1 a)$ y $(\exists\, k_2 \in N$ tal que $c = k_2 b)$, así, reemplazando b en $c = k_2 b$ obtenemos $c = k_2 k_1 a$, esto indica que $a|c$ con $k_2 k_1 \in N$

R es antisimétrica ya que si $a|b \wedge b|a$ entonces $(\exists\, k_1 \in N$ tal que $b = k_1 a)$ y $(\exists\, k_2 \in N$ tal que $a = k_2 b)$, reemplazando b en $a = k_2 b$ obtenemos $a = k_2 k_1 a$ de donde $k_2 k_1 = 1$, esto nos indica que $k_1 = k_2 = 1$ y entonces $a = b$

3.5.3.1 Conjunto parcial y totalmente ordenado

En general, una relación de orden R definida en un conjunto A no permite ordenar totalmente los elementos de A ya que, dados $a, b \in A$ puede suceder que no se verifique aRb ó bRa, en este caso la relación es de orden parcial.

Por ejemplo, la relación de orden anterior es de orden parcial ya que, por ejemplo, 2 no divide a 3.

Definición.

Una relación de orden R definida en el conjunto A es de *orden total* si $a,b \in A$ entonces aRb o bRa

Ejemplo.

En N definimos la relación T por: $aTb \Leftrightarrow \exists\, n \in N$ tal que $a^n = b$

a) Demuestre que T es una relación de orden
b) ¿Es T un orden total?

Solución.

a) Para que T sea una relación de orden debe cumplir:
   i) $aTa \ \ \forall a \in N$ Refleja
   ii) $[aTb \wedge bTc] \Rightarrow aTc$ Transitiva
   iii) $[aTb \wedge bTa] \Rightarrow a = b$ Antisimétrica

i) aTa ya que $a^1 = a$, $1 \in N$

ii) Si $aTb \wedge bTc$ entonces existen $n, m \in N$ tal que $a^n = b$ y $b^m = c$; debemos demostrar que existe $p \in N$ tal que $a^p = c$.
Reemplazando $b = a^n$ en $c = b^m$ obtenemos $c = (a^n)^m = a^{nm}$, con $p = nm \in N$ se cumple.

iii) Si $aTb \wedge bTa$ entonces existen $n, m \in N$ tal que $a^n = b$ y $b^m = a$, reemplazando $b = a^n$ en la segunda igualdad obtenemos $a^{nm} = a$ de donde $nm = 1$, así, $n = m$. Esto indica que $a = b$

b) La relación T no es de orden total ya que, por ejemplo, 2 no esta relacionado
   con 3 (no existe $n \in N$ tal que $2^n = 3$)

3.5.3.2 Congruencia módulo n

Definición.

Sea $m \in Z^+$; $a,b \in Z$ se dicen *congruentes módulo m,* lo que se denota $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$ si y sólo si $a - b$ es múltiplo de m, es decir:

$$a \equiv b(\operatorname{mod} m) \Leftrightarrow \exists\, p \in Z \text{ tal que } a - b = mp$$

Observación.

1) La relación de congruencia en el conjunto de los enteros para un módulo fijo *m* es una relación de equivalencia
2) Esta relación de equivalencia es compatible con la adición y multiplicación, es decir: $a \equiv b(\operatorname{mod} m) \wedge c \equiv d(\operatorname{mod} m)$ entonces $a + c \equiv b + d(\operatorname{mod} m)$ y además $ac \equiv bd(\operatorname{mod} m)$
3) $a \equiv b(\operatorname{mod} m) \Leftrightarrow a - b = mp \in mZ = \{0, \pm m, \pm 2m, \pm 3m, ...\}$

Ejemplo.

Es inmediato que: $4 \equiv 16(\operatorname{mod} 3)$; $-5 \equiv 30(\operatorname{mod} 7)$; $-8 \equiv -30(\operatorname{mod} 11)$

Observación.

Enunciaremos el siguiente Algoritmo de Euclides sólo para demostrar los Teoremas que daremos a continuación.

Algoritmo de Euclides.

Sean $m, n \in Z^{+} \cup \{0\}$ entonces existen, de manera única, $q, r \in Z^{+} \cup \{0\}$ tal que $n = qm + r$ donde $0 \leq r < m$

Teorema

Sea $m \in Z^{+}$, entonces cualquier $n \in Z$ es congruente módulo m a uno y sólo uno de los enteros 0, 1, 2, 3,...,m-1

Demostración.

Sea $n \in Z$, debemos demostrar que n no puede ser congruente módulo m a dos enteros $a, b \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$

Supongamos que $n \equiv a(\bmod m)$ y $n \equiv b(\bmod m)$, entonces $a \equiv b(\bmod m)$.

Si $a > b$ entonces $a - b > 0$ y $a - b \leq m - 1$ ya que $a, b \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$, es decir, $0 < a - b < m - 1$ de esto concluimos que m no divide a $a - b$, así, a no es congruente módulo m con b (contradicción)

Consideremos ahora un n cualquiera donde $n = 0, n > 0, \text{n} < 0$.

Si $n = 0$ entonces $n \equiv 0(\bmod m)$

Si $n > 0$ entonces existen únicos q, r tal que $n = qm + r \,; 0 < r < m$, luego $0 < r \leq m - 1$ de donde $n \equiv r(\bmod m)$

Si $n < 0$ consideramos $n + km > 0$, para algún k (por ejemplo $k = -n + 1$) y aplicamos la demostración del caso anterior.

Ejemplo.

$n \in Z$ es congruente módulo 3 a uno y sólo uno de los enteros 0, 1, 2, y para verificar basta con dividir (Algoritmo de Euclides) por 3, así, $4589 \equiv 2(\bmod 3)$ ya que $4589 = 1532 \cdot 3 + 2$

Definición.

Se llama *clases residuales módulo m* a aquellas m clases que contienen todos los enteros que son congruentes módulo m a uno de los enteros 0, 1, 2, 3,...,m-1

Ejemplo.

Para m = 3 se tiene 3 clases residuales formadas por los enteros congruentes a 0, 1, 2 respectivamente

....., -6, -3, **0**, 3, 6, 9, 12,....
....., -5, -2, **1**, 4, 7, 10, 13,.....
....., -4, -1, **2**, 5, 11, 14,.....

Teorema,

Dos enteros a,b son congruentes modulo m si y sólo si dan el mismo resto al dividirlos por m.

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que al dividir b por m se obtiene $b = qm + r$, $r < m$.
Por hipótesis $a \equiv b(\bmod m)$ es decir, $a - b = mp$, de donde $a = b + mp$, reemplazando b obtenemos $a = qm + r + mp = (q + p)m + r$

$\Leftarrow$) Supongamos que $a = q_1 m + r$, $b = q_2 m + r$ entonces $a - b = (q_1 - q_2)m$, así, $a \equiv b(\bmod m)$

Observación.

La relación de congruencia módulo m fijo determina una partición del conjunto Z en clases de equivalencia y el conjunto cuociente lo denotamos Z_m

Ejemplo.

Determine las clases de equivalencia por la congruencia módulo 5.

Solución.

$$\bar{0} = \{x \in Z / 0 \sim x\} = \{x \in Z / 0 - x = 5p\} = \{x \in Z / x = 5k, k \in Z\} = \{...,-10, -5, 0, 5, 10,....\}$$
$$\bar{1} = \{x \in Z / 1 \sim x\} = \{x \in Z / 1 - x = 5p\} = \{x \in Z / x = 5k + 1, k \in Z\} = \{...,-9, -4, 1, 6, 11,....\}$$

$$\bar{2} = \{x \in Z / 2 \sim x\} = \{x \in Z / 2 - x = 5p\} = \{x \in Z / x = 5k + 2, k \in Z\} = \{...,-8, -3, 2, 7, 12,....\}$$
$$\bar{3} = \{x \in Z / 3 \sim x\} = \{x \in Z / 3 - x = 5p\} = \{x \in Z / x = 5k + 3, k \in Z\} = \{...,-7, -2, 3, 8, 13,....\}$$
$$\bar{4} = \{x \in Z / 4 \sim x\} = \{x \in Z / 4 - x = 5p\} = \{x \in Z / x = 5k + 4, k \in Z\} = \{...,-6, -1, 4, 9, 14,....\}$$

así, $Z_5 = \left\{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4} \right\} = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$

Definición.

Sean $\bar{a}, \bar{b} \in Z_m$, donde a,b son representantes cualesquiera de $\bar{a}, \bar{b}$ respectivamente, entonces $\bar{a} + \bar{b}$ es la clase residual módulo m que contiene a $a + b$ (esto se puede hacer con cualquier elemento de $\bar{a}, \bar{b}$)

Ejemplo.

Determine la tabla de doble entrada de $(Z_3, +)$

Solución.

Z_3 posee los elementos $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ donde

$$\bar{0} = \{...,-3, 0, 3, 6, 9, 12, ...\}$$
$$\bar{1} = \{...,-2, 1, 4, 7, 10, 13, ...\}$$
$$\bar{2} = \{...,-1, 2, 5, 8, 11, 114, ...\}$$

La tabla que obtenemos es

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

donde , para calcular $\bar{1} + \bar{2}$, sumamos, por ejemplo, $1 + 2 = 3$ y como $3 \equiv 0 (\bmod 3)$ entonces $\bar{1} + \bar{2} = \bar{0}$

3.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Sean A, B, C conjuntos cualesquiera. Demuestre
   a) $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$
   b) $A \times B = \phi \Leftrightarrow (A = \phi \ \vee \ B = \phi)$
   c) $A \subseteq B \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C \ \ \forall C$
   d) $A \times (B - C) = A \times B - A \times C$
   e) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

2) Considere las siguientes relaciones
   $R_1 = \{(a,b) \in A^2 / a = b\}$ con $A = \{1,2,3\}$
   $R_2 = \{(x,y) \in N^2 / 2x + y = 9\}$
   $R_3 = \{(a,b) \in A^2 / a \text{ divide a } b\}$ si $A = \{1,2,3,4,5\}$
   $R_4 = \{(x,y) \in A^2 / xy \geq 0\}$ si $A = \{-2,-1,0,1,2,3\}$
   $R_5 = \{(a,b) \in A^2 / a^2 + b^2 > 3\}$ si $A = \{-1,0,1,2,3\}$
   a) Determine por extensión la relación R_i , i = 1,2,3,4,5
   b) Determine $dom(R_i)$, $rec(R_i)$
   c) Determine por extensión R_i^{-1}

3) Sea $R \subseteq A \times B = \{(x,y) / p(x,y)\}$ una relación. Demuestre que:
   a) $dom(R) \subseteq A$; $rec(R) \subseteq B$
   b) $(R^{-1})^{-1} = R$
   c) $dom(R^{-1}) = rec(R)$; $rec(R^{-1}) = dom(R)$

4) Considere las relaciones $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$
Demuestre que $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

5) Sean las relaciones definidas en $\Re$: $R = \{(x,y)/\, y = 2x\}$, $S = \{(x,y)/\, y = 2x^3\}$

Determine: a) $S \circ R$ b) $R \circ S$

6) Considere las siguientes relaciones definidas en Z

$R_1 = \{(a,b)/\, a = b^2\}$

$R_2 = \{(a,b)/\, a + a^2 = b + b^2\}$

$R_3 = \{(x,y)/\, x - y \text{ es multiplo de } 3\}$

$R_4 = \{(a,b)/\, \exists\, m \in Z \text{ tal que } a = mb\}$

$R_5 = \{(a,b)/\, \exists\, k \in Z \text{ tal que } a - b = 2k\}$

Determine cuales de las relaciones planteadas son: reflejas, simétricas, antisimétricas, transitivas

7) Si R es una relación en A tal que R es transitiva demuestre que R^{-1} también es transitiva

8) Sea $R \subseteq A^2$. Demuestre: R simétrica $\Leftrightarrow R^{-1} = R$

9) Sea R una relación en A. Demuestre que:

R es refleja $\Leftrightarrow D \subseteq R \wedge D = \{(a,a)/\, a \in A\}$

10) Demuestre que las siguientes relaciones definidas son relaciones de equivalencia

$R_1 \subseteq \Re^2$ tal que $aR_1b \Leftrightarrow \exists k \in Z$ tal que $a - b = 2k$

R_2 definida en Q^+ tal que $aR_2b \Leftrightarrow \exists n \in Z$ tal que

11) En Z definimos la relación R tal que $aRb \Leftrightarrow \exists\, n \in N \cup \{0\}$ tal que $b - a = n$

Demuestre que R es una relación de orden

¿Es R un orden total? Justifique

12) En N definimos la relación T tal que $aTb \Leftrightarrow \exists\, n \in N$ tal que $a^n = b$

Demuestre que R es una relación de orden

¿Es R un orden total? Justifique

13) En la familia de conjuntos Λ definimos la relación $\subseteq$

a) Demuestre que R es una relación de orden

b)¿Es R un orden total? Justifique

c) Si $\Lambda = \{X / X \subseteq A\}$ con $A = \{1,2,3,4\}$, verifique lo demostrado en a) y b)

14) Si R es una relación de orden en A y S es una relación de orden en B demuestre que la
relación T definida en $A \times B$ tal que $(a,b)T(c,d) \Leftrightarrow aRc \wedge bSd$ es de orden

15) Sean $R_1 \subseteq A^2$, $R_2 \subseteq B^2$ relaciones de orden y R_3 una relación definida en $A \times B$ tal
que $(a,b)R_3(c,d) \Leftrightarrow aR_1c \wedge bR_2d$. Demuestre que R_3 es relación de orden

16) Sea R una relación en A. Decimos que: R es conexa $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : aRb \vee bRa$
Demuestre: Si R es simétrica, transitiva y conexa entonces R es de relación de equivalencia.

17) Sea $\overline{x}$ la clase de equivalencia de x según R , donde R es la relación de equivalencia
(también denotada ~) definida en el conjunto $A \neq \phi$. Demuestre:

a) $\overline{x} \neq \phi \ \forall \overline{x}$

b) Todos los elementos de una clase de equivalencia R son equivalentes R entre si

c) $\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow x \sim y$

18) Sea A/R el conjunto cuociente de A por R donde, R es una relación de equivalencia
definida en el conjunto $A \neq \phi$. Demuestre:

a) $\forall\ \overline{x} \in A/R$, $\overline{x} \neq \phi$

b) $\overline{x} \in A/R \ \wedge \overline{y} \in A/R$, $\overline{x} \neq \overline{y}$ entonces $\overline{x} \cap \overline{y} = \phi$

c) $\displaystyle\bigcup_{\overline{x} \in A/R} = A$

19) Sea $m \in Z^+$; $a,b \in Z$ se dicen *congruentes modulo* m lo que denotamos $a \equiv b(\bmod m)$
o simplemente $a \equiv b(m)$ si y sólo si $a - b$ es múltiplo de m, es decir:

$$a \equiv b(m) \Leftrightarrow \exists\ p \in Z \text{ tal que } a - b = pm$$

Demuestre que la relación de congruencia definida en los números enteros para un módulo m fijo es una relación de equivalencia

20) Determine Z_3 , la clase de equivalencia por la congruencia módulo 3

21) Sea $A = \{a,b,c\}$ y $R \subseteq A^2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\}$.

a) Demuestre que R es una relación de equivalencia
b) Determine: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$
c) Determine A/R

3.7 FUNCIONES

Uno de los más importantes conceptos en Matemática se refiere a un tipo particular de relación entre elementos de dos conjuntos; las funciones.

Una función expresa la idea de una cantidad que depende de otra u otras cantidades, por ejemplo podemos afirmar que el área de un cuadrado depende o es función de la longitud del lado de éste; si al área lo denotamos por A y la longitud del lado lo denotamos por l entonces podemos escribir $A = f(l)$, y en éste caso particular, la expresión matemática es $A(l) = l^2$; el volumen V de un cilindro recto depende, es función, del radio basal r y de altura h, lo que escribimos $V = f(r,h)$ y la expresión matemática es $V(r,h) = \pi r^2 h$

En matemática designamos a la variable independiente por x o por $x_1, x_2, ..., x_n$ a las eventuales variables independientes que explican el comportamiento de la variable dependiente y , escribiendo $y = f(x)$ o $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ respectivamente

En la presente sección estudiaremos funciones con una única variable independiente, la función inversa y composición de funciones

3.7.1 Definición de función

Definición

Una función f definida en el conjunto A con valores en el conjunto B es toda relación $f \subseteq A \times B$ tal que a cada elemento x de A le hace corresponder un único elemento y del conjunto B

Observación.

1) $f \subseteq A \times B$ es una función de A a B si y sólo si $\forall x \in A \ \exists ! y \in B$ tal que $y = f(x)$

2) $f \subseteq A \times B$ es función $\Leftrightarrow \begin{cases} a) \ Domf = A \\ b) \left[(x,y) \in f \wedge (x,z) \in f\right] \Rightarrow y = z \end{cases}$

3) También se puede denotar a la función f por $f : A \to B$ tal que $y = f(x)$ o por $f : A \to B = \{(x,y) / y = f(x)\}$

4) $y = f(x)$ se lee “ y es la imagen de x por f “

5) $y = f(x) \Leftrightarrow (x,y) \in f$

6) Al conjunto A lo llamamos conjunto de partida de f y al conjunto B lo llamamos conjunto de llegada

Ejemplos.

1) Sean $A=\{a,b,c\}$, $B=\{d,e,f,g\}$ entonces las siguientes relaciones de A a B son funciones de A a B
$f_1=\{(a,d),(b,e),(c,f)\}$ $f_2=\{(a,d),(b,d),(c,d)\}$

2) Sea $f\subseteq A\times\Re=\{(2,5a+2),(4,a),(4,2a+1),(7,2a^2-1)\}$ una relación donde $A=\{2,4,7\}$. Determine $a\in\Re$ para que f sea función
Solución.
Para que f sea función , el elemento 4 debe tener una única imagen, así se debe cumplir que $a=2a+1$, es decir , $a=-1$
La función es $f=\{(2,-3),(4,-1),(7,1)\}$

3) Demuestre que la relación $f\subseteq\Re\times\Re=\{(x,y)/2x+3y=6\}$ es una función
Demostración.
Debemos demostrar:
a) $Domf=\Re$ b) $[(x,y)\in f\wedge(x,z)\in f]\Rightarrow y=z$

a) Como $Domf=\{x\in\Re/\exists\, y\in\Re \text{ tal que } y=f(x)\subseteq\Re\}$ basta con demostrar que $\Re\subseteq Domf$
Sea $x\in\Re$, debemos demostrar que existe $y\in\Re$ tal que $y=f(x)$; tal y podemos despejarlo de $2x+3y=6$, obtenemos $y=f(x)=\dfrac{6-2x}{3}\in\Re$ (ya que $x\in\Re$)

b) Si $[(x,y)\in f\wedge(x,z)\in f]$ entonces $(2x+3y=6)\wedge(2x+3z=6)$, es decir $2x+3y=2x+3z$, de donde $y=z$

4) Sea $f\subseteq A\times\Re=\left\{(x,y)/y=f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}\right\}, A\subseteq\Re$ una función. Determine el máximo dominio A y máximo recorrido
Solución.
Como $Domf=\{x\in A/\exists\, y\in\Re \text{ tal que } y=f(x)\subseteq\Re\}$ y $y=f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ entonces $Domf=\Re-\{2\}$
Como $\operatorname{Re}cf=\{y\in\Re/\exists\, x\in\Re-\{2\} \text{ tal que } y=f(x)\}$, despejando x de $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ obtenemos $y(x-2)=x+1$, es decir, $yx-x=1-2y$, esto indica que $x(y-1)=1-2y$ de tal manera que $x=\dfrac{1-2y}{y-1}\in\Re$ si $y\neq1$, así entonces, el máximo recorrido de f es $\operatorname{Re}cf=\Re-\{1\}$

3.7.2 Operaciones con funciones
Definición.
Sean f, g dos funciones tal que $Domf$, $Domg$ son sus respectivos dominios, entonces definimos las función suma, denotada $f+g$, tal que
i) $Dom(f+g) = Domf \cap Domg$
ii) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Observación

1) De manera más simplificada definimos la suma de las funciones f, g por
$f+g = \{(x, f(x)+g(x)) / x \in Domf \cap Domg\}$

2) Análogamente definimos las siguientes funciones
$f-g = \{(x, f(x)-g(x)) / x \in Domf \cap Domg\}$; función diferencia
$f \cdot g = \{(x, f(x)\cdot g(x)) / x \in Domf \cap Domg\}$; función producto
$f^n = \{(x, f^n(x)) / x \in Domf\}$, $n \in N$; función potencia
$cf = \{(x, cf(x)) / x \in Domf\}$, $c = C^{te}$; función ponderada

Ejemplo.
Considere las funciones $f = \{(1,3),(2,6),(4,8),(6,2)\}$, $g = \{(0,1),(1,2),(2,-1),(4,5),(7,0)\}$
Como $Domf = \{1,2,4,6\}$, $Domg = \{0,1,2,4,7\}$ entonces $Domf \cap Domg = \{1,2,4\}$, de donde:
$f+g = \{(1,5),(2,5),(4,13)\}$
$f \cdot g = \{(1,6),(2,-6),(4,40)\}$

3.7.3 Función inversa
3.7.3.1 Función inyectiva
Definición.
Decimos que la función $f : A \to B$ es inyectiva o uno a uno si y sólo si:
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \ \forall x_1, x_2 \in A$

Observación
Usando la "contrapositiva" tenemos:
La función $f : A \to B$ es inyectiva $\Leftrightarrow [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2] \ \forall x_1, x_2 \in A$

Ejemplos
1) Considere la función $f : \Re - \{1\} \to \Re - \{2\}$ tal que $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$, demuestre que f es inyectiva.
Demostración.
Debemos demostrar: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \ \forall a, b \in \Re - \{1\}$

$f(a)=f(b)\Rightarrow \dfrac{2a+3}{a-1}=\dfrac{2b+3}{b-1}\Rightarrow (2a+3)(b-1)=(2b+3)(a-1)$, con un poco de trabajo algebraico concluimos que $a=b$

2) Demuestre que la función $f:(-\infty,-1)\to\Re$ tal que $f(x)=1-\sqrt{x^2-4x-5}$ es inyectiva
Demostración.
Para que lo sea se debe cumplir: $f(a)=f(b)\Rightarrow a=b\ \ \forall a,b\in(-\infty,-1)$
Como $f(x)=1-\sqrt{x^2-4x-5}=1-\sqrt{x^2-4x+4-9}=1-\sqrt{(x-2)^2-9}$ entonces
$f(a)=f(b)\Rightarrow 1-\sqrt{(a-2)^2-9}=1-\sqrt{(b-2)^2-9}$, así, cancelando el 1 y elevando al cuadrado (note que la cantidad subradical es no negativa) obtenemos
$(a-2)^2-9=(b-2)^2-9$, es decir, $(a-2)^2=(b-2)^2$; al extraer raíz cuadrada conseguimos $|\,a-2\,|=|\,b-2\,|$ de donde $2-a=2-b$ y finalmente $a=b$

3.7.3.2 Conjunto imagen.
Definición.
Sea $f:A\to B$ una función y $E\subseteq A$, definimos la imagen de E por f, denotada $f(E)$ como el conjunto tal que $f(E)=\{y\in B\,/\,\exists\, x\in A \text{ tal que } y=f(x)\}$
Ejemplos.
1) Considere la función $f:[-5,\infty)\to\Re$ tal que $f(x)=\sqrt{x+5}$
Determine $f(E)$ si $E=(-1,20]$
Solución.
Debemos determinar todos los valores de $y=f(x)=\sqrt{x+5}$ tal que $x\in(-1,20]$
Si $x\in(-1,20]$ entonces $-1<x\le 20$, de aquí, $4<x+5\le 25$ de tal manera que, al extraer raíz cuadrada obtenemos $2<\sqrt{x+5}\le 5$, finalmente
$f(E)=\{f(x)/\,x\in E\}=(2,5]\subseteq\Re$

Observación
El problema anterior también se puede solucionar de la siguiente manera; como lo que deseamos es determinar el conjunto que valores que toma $y=f(x)=\sqrt{x+5}$ cuando $x\in(-1,20]$, entonces podemos despejar x, obteniendo $x=y^2-5$. Imponiendo la condición conseguimos $-1<y^2-5\le 20$ así, $4<y^2\le 25$ de donde $2<y\le 5$

3.7.3.3 Función sobreyectiva
Definición
Decimos que la función $f:A\to B$ es sobreyectiva si y sólo $\forall\, y\in B\ \exists\, x\in A$ tal que $y=f(x)$

Observación.
1)La función $f:A\to B$ es sobreyectiva si y sólo si "todos los elementos del conjunto B son imagen de algún elemento de A"

2) La función $f : A \to B$ es sobreyectiva si y sólo si $\operatorname{Re}c(f) = B$

Ejemplos

1)Demuestre que la función $f : [0,2) \to (-\infty,0]$ tal que $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ es sobreyectiva

Solución.

Debemos verificar que $\operatorname{Re}c(f) = (-\infty,0]$, despejemos x de $y = \dfrac{x}{x-2}$; tenemos:

$y = \dfrac{x}{x-2} \Rightarrow xy - 2y = x \Rightarrow x = \dfrac{2y}{y-1}$, $y \neq 1$;como $x \in [0,2)$ entonces $0 \leq \dfrac{2y}{y-1} < 2$

La solución de esta inecuación es $(-\infty,0]$, así $\operatorname{Re}c(f) = (-\infty,0]$

2) Si la función $f : \Re \to B \subseteq \Re$ tal que $f(x) = |x-2| - x$ es sobreyectiva, determine el conjunto B

Solución

Observe que $x \in \Re$ y que la función involucra a $|x-2|$, esto nos siguiere considerar dos caso: a) $x < 2$ b) $x \geq 2$

a) $x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow |x-2| = 2 - x$, así $f(x) = |x-2| - x = 2 - 2x > -2$ ya que $x < 2 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow -2x > -4 \Rightarrow 2 - 2x > -2$, de donde $f(x) \in (-2,\infty)$

b) $x \geq 2 \Rightarrow x - 2 \geq 0 \Rightarrow |x-2| = x - 2$, así $f(x) = |x-2| - x = x - 2 - x = -2 \in \{-2\}$

Por a) y b) $\operatorname{Re}c(f) = \{f(x) / x \in \Re\} = (-2,\infty) \cup \{2\} = [2,\infty) = B$

3.7.3.4 Función inversa, Teoremas

Función inversa

Si $f \subseteq A \times B$ es una relación, sabemos que existe la relación inversa $f^{-1} \subseteq B \times A$; cuando $f \subseteq A \times B$ es función, no estamos seguros de que $f^{-1} \subseteq B \times A$ sea también una función, el siguiente teorema regula la situación planteada, nos indica que la función *f* debe ser inyectiva y sobreyectiva, es decir, debe ser biyectiva

Teorema

Sea $f : A \to B$ tal que $y = f(x)$ una función, se cumple:

$f^{-1} : B \to A$ es función $\Leftrightarrow$ $f : A \to B$ es biyectiva

Demostración.

$\Leftarrow$) Debemos demostrar: a) $Dom(f^{-1}) = B$ b) $[(a,b) \in f^{-1} \wedge (a,c) \in f^{-1}] \Rightarrow b = c$

a) $Dom(f^{-1}) = \operatorname{Re}c(f) = B$ ya que *f* es sobreyectiva

b) $[(a,b) \in f^{-1} \wedge (a,c) \in f^{-1}] \Rightarrow [(b.a) \in f \wedge (c,a) \in f] \Rightarrow [f(b) = a \wedge f(c) = a]$

$\Rightarrow f(b) = f(c) \Rightarrow b = c$ ya que *f* es inyectiva

$\Rightarrow$) Queda propuesta

Observación
Dada la función biyectiva $f : A \to B$ tal que $y = f(x)$, nos debe interesar determinar la expresión funcional de la inversa, es decir , determinar $f^{-1}(x)$; tenemos:
$y = f(x) \Rightarrow (x,y) \in f \Rightarrow (y,x) \in f^{-1} \Rightarrow f^{-1}(y) = x$
Es decir, despejamos x de $y = f(x)$ y en ésta última expresión reemplazamos y por x

Ejemplos
1) Considere la función biyectiva $f : \Re - \{1\} \to \Re - \{2\}$ tal que $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$, determine $f^{-1}(x)$
Solución
De $f(x) = y = \dfrac{2x+3}{x-1}$ tenemos $yx - y = 2x+3$ de donde $x = \dfrac{y+3}{y-2}$, así entonces
$x = f^{-1}(y) = \dfrac{y+3}{y-2}$ de donde, $f^{-1} : \Re - \{2\} \to \Re - \{1\}$ tal que $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$
2) Considere la función $f : A \subseteq \Re \to B \subseteq \Re$ tal que $f(x) = 3x^2 + 6$, $x \le 0$
Determine la función inversa de f
Solución
Para que exista f^{-1}, la función f debe ser biyectiva
f es inyectiva ya que: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1^2 + 6 = 3x_2^2 + 6 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$, extrayendo raíz cuadrada obtenemos $|x_1| = |x_2|$, así, $-x_1 = -x_2$ de donde $x_1 = x_2$
Ahora debemos determinar $\operatorname{Re}c(f)$ de tal manera que $f^{-1} : \operatorname{Re}c(f) \to \Re^- \cup \{0\}$ sea función.
Si $x \le 0$ entonces $x^2 \ge 0$ así $y = f(x) = 3x^2 + 6 \ge 6$, concluimos que $\operatorname{Re}c(f) = [6,\infty)$
y $f^{-1} : [6,\infty) \to \Re^- \cup \{0\}$ es función
Determinemos, finalmente, $f^{-1}(x)$
De $y = 3x^2 + 6$ obtenemos $x^2 = \dfrac{y-6}{3}$ de donde $x = -\sqrt{\dfrac{y-6}{3}}$, entonces
$f^{-1} : [6,\infty) \to \Re^- \cup \{0\}$ tal que $f^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{x-6}{3}}$

3.7.4 Composición de funciones
Definición
Sean f, g dos funciones tal que $Dom(f), Dom(g)$ son sus respectivos dominios entonces definimos las función compuesta de f con g , denotada $f \circ g$, a aquella tal que
1) $Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g) / g(x) \in Dom(f)\} = Dom(g) \cap \{x / g(x) \in Dom(f)\}$
1) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Observación
Podemos denotar, más simple: $f \circ g = \{(x, f(g(x)) / x \in Dom(f \circ g)\}$

Ejemplos.
1) Considere las funciones $f:\Re\to\Re$ tal que $f(x)=x^2$, $g=\{(4,2),(9,1)\}$, determine $g\circ f$
Solución
En primer lugar determinemos $Dom(g\circ f)$
$Dom(g\circ f)=\{x\in Dom(f)\,/\,f(x)\in Dom(g)\}=\{x\in\Re\,/\,x^2\in\{4,9\}\}$,así, $x^2=4$ indica que $x=\pm 2$ y $x^2=9$ indica que $x=\pm 3$, es decir, $Dom(g\circ f)=\{-3,-2,2,3\}$
Ahora, como $g\circ f=\{(x,g(f(x))\,/\,x\in\{-3,-2,2,3\}\}$ entonces
$g\circ f=\{(-3,1),(-2,2),(2,2),(3,1)\}$

2) Considere las funciones $f:\Re\to\Re$, $g:\Re\to\Re$ tal que $f(x+1)=2x+5$, $g(x)=3x-2$. Determine $(f\circ g)(x)$
Solución.
Si $x+1=p$ entonces $x=p-1$ de donde, la expresión $f(x+1)=2x+5$ se convierte en $f(p)=2(p-1)+5=2p+3$, es decir $f(x)=2x+3$
Por otro lado $Dom(f\circ g)=\{x\in Dom(g)\,/\,g(x)\in Dom(f\}=\{x\in\Re\,/\,3x-2\in\Re\}$ así,
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x-2)=2(3x-2)+3=6x-3$

3) Considere las funciones *f, g* tal que $f(x)=x^2$; $g(x)=ax+1$, $a>0$ con dominio real apropiado para que ambas sean biyectivas.
Si $(f^{-1}\circ g^{-1})(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}$, determine $(g\circ f)(-2)$
Solución.
Como $y=f(x)=x^2$ entonces $x=\sqrt{y}$ de donde $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$
Como $y=g(x)=ax+1$ entonces $x=\dfrac{y-1}{a}$ de donde $g^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{a}$
Imponiendo la condición tenemos $(f^{-1}\circ g^{-1})(\frac{3}{2})=f^{-1}(g^{-1}(\frac{3}{2}))=f^{-1}(\frac{1}{2a})=\sqrt{\frac{1}{2a}}=\frac{1}{2}$, de donde el valor de *a* es $a=2$, así, $g(x)=2x+1$.
Finalmente, $(g\circ f)(-2)=g(f(-2))=g(4)=9$

3.8 EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Sean $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,5\}$;
$f=\{(1,3),(2,4),(a,b)\}$, $g=\{(3,3),(2,4)(c,d)\}$ funciones de *A* a *B*.
Si $f(x)\neq x\ \forall x\in A$, $\mathrm{Rec}f\neq B$, $g(1)=3$, determine el valor de $(b-a)+(c-d)$
Resp. –1

2) Sea $f:N\to\Re$ una función tal que $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x \text{ es par}\\ -1 & \text{si } x \text{ es impar}\end{cases}$
¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) $f(2x) + f(3y) = 0 \Rightarrow x$ es par $\wedge\ y$ es impar
b) $f(x)f(y) = -2 \ \ \forall x, y \in N$
c) Existe un único natural n tal que $f(nx) = nf(x)$
Resp. c

3) Determine $a, b \in \Re$ para que
$f = \{(1,8),(2,-3),(1,a^2+b^2),((-1,a+b),(a^2+b,a),(b+a^2,b)\}$ sea función
Resp. $(a = 2 \wedge b = 2) \vee (a = -2 \wedge b = -2)$

4) Sea $A = \{p \,/\, p \text{ es una proposición}\}$. Definimos una función $f : A \to \Re$ por
$f(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ es V} \\ 0 & \text{si } p \text{ es F} \end{cases}$. Demuestre:
a) $f(p \vee q) = f(p) + f(q) - f(p)f(q)$
b) $f(\sim p) = 1 - f(p)$
c) $f(\sim p \vee q) = 1 - f(p)f(\sim q) = 1 - f(p) + f(p)f(q)$

5) Considere las funciones reales *f, g* tal que $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x+1) = x^2$.
Determine $f((x-1)^2) - 6g(x)$
Resp. $(x-1)^2(x-3)(x+1)$

6) Sean *f, g* funciones reales definidas por $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$;
$a, b, c, d \in \Re$; $a, b \neq 0$.¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
a) $f(x+y) = f(x) + f(y) \Leftrightarrow b = 0$
b) $(fg)(x) = x^2 + (b+d)x + bd \Leftrightarrow \dfrac{a}{c} = 1$
c) $(f+g)(x) = b + d \Leftrightarrow a = -c$
d) $f(g(x)) = acx + ad$
Resp. a) y c)

7) Sea $f : \Re \to \Re$ una función tal que $f(x) = ax + b$; $a, b \in \Re$
Si $f(x+y) = f(x) + f(y) \ \forall x, y \in \Re$ y si $f(-2) = -6$, determine *a* y *b*
Resp. $a = 3, b = 0$

8) Sea $f : (-\infty, 0] \to \Re$ una función tal que $f(x) = x^2 - 3$. Demuestre que *f* es inyectiva

9) Considere las funciones reales *f, g* tal que
$f(x+1) = ax + b$, $g(x) = x - b$; $a, b \in \Re - \{0\}$.Si $f \circ g = g \circ f$ Determine el valor de $b(a-1)$
Resp 0

10) Si $f : \Re \to \Re$ una función tal que $f(x+7) = f(x) + f(7) \ \ \forall \text{x} \in \Re$ y $f(0) = 0$
Verifique que:
a) $f(-7) = -f(7)$
b) $f(35) = f(14) + 3f(7)$
c) $\dfrac{f(63)}{f(7)} = 9$ si $f(7) \neq 0$

11) Sean *f, g* funciones reales definidas por

$f(x)=\sqrt{x+4}$, $x\in[0,6]$; $g(x)=x^2+2$, $x\in[-1,3]$, determine las funciones $f\circ g$ y $g\circ f$

Resp. $(f\circ g)(x)=\sqrt{x^2+6}$, $x\in[-1,2]$; $(g\circ f)(x)=x+6$, $x\in[0,5]$

Sean *f, g* funciones reales definidas por: $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, $x\geq 3$;

$g(x)=\dfrac{2x+1}{x}$, $x\geq\dfrac{1}{2}$. Determine $f\circ g$ y $g\circ f$

Resp. $(f\circ g)(x)=x$, $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, $(g\circ f)(x)=x$, $x\in[3,4]$

12) Sean *f, g* funciones reales tal que $f(x)=x^2$, $x<0$; determine $g(x)$ si $f(g(x))=x^2-4x+5$ Resp. $g(x)=-|2x-3|$

13) Sean *f, g* funciones reales tal que $f(x-2)=x^2+x+1$, $g(x-a)=x$.

Determine $a\in\Re$ de modo que $(f\circ g)(2)=(g\circ f)(a-2)$ Resp. $a=-\dfrac{12}{7}$

14) Si $f:X\to Y$ es función, $A,B\subseteq Y$ demuestre:

a) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

b) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

c) $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$

d) $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$

e) $f^{-1}(A-B)=f^{-1}(A)-f^{-1}(B)$

f) $f^{-1}(B^C)=(f^{-1}(B))^C$

g) $A\subseteq B\Rightarrow f^{-1}(A)\subseteq f^{-1}(B)$

h) $f(f^{-1}(B)\subseteq B\ \ \forall B\subseteq Y$

i) $f^{-1}(f(B))\subseteq B\ \ \forall B\subseteq X$

15) Hallar $a,b\in\Re$ para que la función $f:[b,-2]\to\left[a,-\dfrac{1}{24}\right]$ sea biyectiva donde

$f(x)=\dfrac{1}{6x+6}$ Resp. $a=-\dfrac{1}{6}, b=-5$

16) Si $f:A\subseteq\Re\to B\subseteq\Re$ es una función tal que $f(x+5)=\dfrac{1}{x+2}$, determine el

valor de *x* que satisface la relación $(f^{-1}\circ f)(\dfrac{4}{x})=2$

Resp. $A=\Re-\{3\}$, $B=\operatorname{Re}c(f)=\Re-\{0\}$, $x=2$

17) Sea $f:[0,\infty)-\{2\}\to\Re$ una función tal que $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$. Demuestre que *f* es inyectiva

18) Sea f una función biyectiva tal que $f^{-1}(x)=2x+2b$, $b\neq 0$; $f^{-1}(3b)=2b^2$,

determine $\dfrac{f(10)}{f^{-1}(10)}$ Resp. $\dfrac{1}{28}$

CAPITULO 4

LOS NUMEROS NATURALES
4.1 INDUCCION MATEMÁTICA

Existen diversas formas de sistematizar al conjunto de los números naturales y sus propiedades, la axiomática de Peano es aquella en que nos basaremos para deducir la Inducción Matemática y declarar algunas propiedades importantes de los naturales.

En 1.889, Giuseppe Peano (1858-1932) presentó la siguiente axiomática para los números naturales N

1) $1 \in N$

2) $(\forall\, n \in N)(\exists!\, n^{+} \in N)$ tal que $n^{+} = n+1$

3) $\forall\, n \in N : n^{+} \neq 1$

4) $\forall\, n, m \in N : n \neq m \Rightarrow n^{+} \neq m^{+}$

5) $\left[S \subseteq N \text{ tal que } \begin{cases} \text{a) } 1 \in S \\ \text{b) } n \in S \Rightarrow n^{+} \in S \end{cases} \right] \Rightarrow S = N$

Observación.

- El axioma 2 nos indica que todo natural n tiene un único sucesor $n^{+} = n+1$
- El axioma 3 nos indica que el natural 1 es sucesor de ningún natural, es decir, el 1 es el primer natural.
- El axioma 4 nos indica que dos naturales distintos no tienen el mismo sucesor
- El axioma 5, Axioma de la Inducción, nos permitirá demostrar la validez de proposiciones en todo el conjunto de los naturales
- La axiomática de Peano nos permite, además, definir en el conjunto N la operación

adición, la operación multiplicación y una relación de orden

4.1.1 Primer Teorema de la Inducción

Teorema.

Consideremos la proposición P(n), que contiene la variable $n \in N$.

Si la proposición P(n) es tal que:

a) **Se cumple que $P(1)$ es verdadera**

b) **Asumiendo que $P(k)$ es verdadera, se verifica que $P(k+1)$ es verdadera,**

Entonces, P(n) se cumple para todo natural.

Demostración.

Consideremos el conjunto S formado por todos aquellos naturales que satisfacen la proposición, es decir, sea $S = \{n \in N \,/\, P(n) \text{ es verdedera}\}$, debemos demostrar que P(n) se satisface para todo natural, es decir, debemos demostrar que $S = N$.

Como P(1) es verdadero entonces $1 \in S$, además, por hipótesis se cumple que $P(k) \text{ V} \Rightarrow \text{P(k + 1) V}$; esto indica que $k \in S \Rightarrow (k+1) \in S$.

Dado que el conjunto S satisface el quinto axioma de Peano concluimos que $S = N$ y entonces la proposición se cumple en N.

Observación.

1) Podemos anotar, en forma más breve, como sigue:

$$\left.\begin{cases} a) \text{ P(1) V} \\ b) P(k) \text{ V} \Rightarrow \text{P(k + 1) V} \end{cases}\right\} \Rightarrow P(n) \text{ es } V \ \forall\, n \in N$$

2) También se conoce a esta proposición como “Primer principio de la Inducción Matemática”

3) En el Primer Principio de la Inducción podría ocurrir que la parte a) no se verifique $P(1)$ si no que para $P(n_0)$, $n_0 > 1$ entonces, si se cumple b) para todo $n \geq n_0$ concluimos que la proposición se cumple para todo $n \geq n_0$

Ejemplos.

Demuestre que: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ se cumple para todo natural

Demostración.

Sea P(n): $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$. Debemos demostrar que:

a) $P(1)$ es verdadera, y que b) $P(k)$ V $\Rightarrow$ P(k + 1) V

Antes de realizar la demostración debemos notar que en ella está involucrada la sucesión $\left(\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)_{n\in N}$ y que el hecho de que $P(k)$ sea verdadera significa que la suma de los k primeros términos de la sucesión es $\frac{k}{k+1}$.

a) $P(1)$ es verdadero ya que $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$

$P(2)$ es verdadero si se cumple: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{2+1}$.

Como el lado izquierdo de la última expresión tiene valor $\frac{2}{3}$ tanto como el lado derecho, concluimos que $P(2)$ es verdadero

b) Si P(k) es verdadero, es decir, si $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{k}{k+1}$,

debemos demostrar que P(k + 1) es verdadero, es decir, debemos demostrar que

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$. Veamos esto último

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

Así entonces la proposición se cumple en el conjunto de los Naturales

Observación

1) Ahora estamos seguros de poder sumar los n primeros términos de la sucesión dada, sin sumarlos, bastando con aplicar la fórmula de suma declarada
2) La deducción de la fórmula, cuestión que la vemos interesante, la estudiaremos en una sección posterior.

Ejemplo.
Demuestre que toda expresión del tipo $3^{2n}-1$ es divisible por 8, para todo valor de n en los naturales
Demostración.

Sea $P(n): 3^{2n}-1=8r$, para algún $r\in N$

Debemos demostrar: a) $P(1)$ V b) $P(k)$ V $\Rightarrow P(k+1)$ V

a) $P(1)$ V ya que $P(1): 3^{2\cdot 1}-1=8=8\cdot 1$, $1\in N$

$P(2)$ será verdadera si existe $r\in N$ tal que $3^{2\cdot 2}-1=8r$. Como $3^{2\cdot 2}-1=80$ y $80=8\cdot 10$ entonces, con $r=10\in N$ se satisface la condición

b) Si $P(k)$ es V entonces existe $r\in N$ tal que $3^{2k}-1=8r$, debemos demostrar que $P(k+1)$ es V, es decir, debemos demostrar que existe $s\in N$ tal que $3^{2(k+1)}-1=8s$

Veámoslo

$$3^{2(k+1)}-1$$

$$=3^{2k}3^2-1$$

$$=3^{2k}3^2-3^2+3^2-1$$

$$= 3^2(3^{2k} - 1) + 3^2 - 1$$

$$= 3^2(8r) + 8$$

$= 8(9r + 1)$ =8s con $s = (9r + 1) \in N$

Por a) y b) los números de la forma $3^{2n} - 1$son divisibles por 8 para todo natural n

Observación

- Notemos el uso de la hipótesis inductiva al reemplazar (en el quinto paso) $3^{2k} - 1$ por $8r$

- Como, por hipótesis inductiva se cumple $3^{2k} - 1 = 8r$, podemos despejar 3^{2k} obteniendo $3^{2k} = 8r + 1$. Si reemplazamos esto último en el paso 2 conseguimos:

$$(8r + 1)3^2 - 1$$

$$= 72r + 8$$

$$= 8(9r + 1) = 8s$$

Ejemplo.
Demuestre que $5^{2n} + (-1)^{n+1}$ es divisible por 13 para todo valor de n en N

Demostración.

Sea $P(n): 5^{2n} + (-1)^{n+1} = 13p$ para algún valor de p en N
Debemos demostrar que:
a) $P(1)$ se cumple b) Si $P(k)$ se cumple entonces $P(k+1)$ también se cumple

a) Como $5^{2\cdot1} + (-1)^{1+1} = 25 + 1 = 26 = 13 \cdot 2$ entonces se verifica $P(1)$
b) Si $P(k)$ se cumple entonces existe $p \in N$ tal que $5^{2k} + (-1)^{k+1} = 13p$, debemos demostrar que $P(k+1)$ también se cumple, es decir, debemos probar que existe $q \in N$ tal que $5^{2k+2} + (-1)^{k+2} = 13q$.

$$5^{2k+2} + (-1)^{k+2} = 25 \cdot 5^{2k} + (-1)(-1)^{k+1}$$
$$= 25 \cdot 5^{2k} + 25(-1)^{k+1} - 25(-1)^{k+1} + (-1)(-1)^{k+1}$$
$$= 25\left[5^{2k} + (-1)^{k+1}\right] + (-1)^{k+1}(-25 - 1)$$
$$= 25 \cdot 13p - 26(-1)^{k+1}$$

$= 13(25p - (-1)^{k+1}) = 13q$, donde $q = 25p - (-1)^{k+1} \in N$

4.1.2 Segundo Teorema de la Inducción
Usaremos el siguiente Principio del Buen Orden para demostrar el Segundo Principio de la Inducción Matemática.

Principio del Buen Orden

Sea $A \neq \phi$ **,** $A \subseteq N$ **entonces existe** $p \in A$ **tal que** $p \leq n, \forall n \in A$

Segundo Teorema de Inducción Matemática

Sea P(n) una proposición que contiene una variable $n \in N$ **, tal que.**

a) $P(1)$ **es verdadera**

b) Para todo $k \in N$ **:** $P(1) \wedge P(2) \wedge ... \wedge P(k)$ **verdadera** $\Rightarrow P(k+1)$ **verdadera**

Entonces $P(n)$ **es verdadera para todo** $n \in N$

Demostración.

Supongamos que $S = \{n \in N \, / \, P(n) \text{ es } V\}$ es subconjunto propio de N, entonces

$N - S \neq \phi$ y $N - S \subseteq N$.

Por el Principio del Buen Orden existe $m \in N - S$ tal que $m \leq r \ \ \forall\, r \in N - S$,

luego $1,2,3,..., m-1 \in S$, es decir, $P(1), P(2), ..., P(m-1)$ es verdadero, luego , por hipótesis se cumple que $m \in S$; esto último es una contradicción, de donde $S = N$

Ejemplo.

Sea $(a_n)_{n \in N}$ una sucesión definida en $\Re$ tal que $a_1 = 1, a_2 = 2$ y además $a_n = a_{n-1} + ... + a_2 + a_1$, $\forall\, n \geq 3$. Demuestre que $a_n = 3 \cdot 2^{n-3}$ $\forall n \geq 3$

Demostración.

Sea $P(n): a_n = 3 \cdot 2^{n-3}$,

Debemos demostrar. a) $P(3)$ es V b) $P(3), P(4), .., P(k)$ V entonces $P(k+1)$ V

a) $P(3)$ es V ya que $a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$ (usando a definición) y, usando la fórmula: $a_3 = 3 \cdot 2^{3-3} = 3$

b) Si $a_n = 3 \cdot 2^{n-3}\ \forall n \in N\ , 3 < n \leq k$ debemos demostrar que $a_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-2}$

Veamos esto último

$a_{n+1} = a_n + .. + a_2 + a_1$ (usando la definición)

$= 3 \cdot 2^{n-3} + 3 \cdot 2^{n-4} + ... + 3 \cdot 2^{3-3} + 2 + 1$ (usando la hipótesis inductiva)

$= 3(2^{n-3} + 2^{n-4} + ... + 2^1 + 2^0) + 3$ (*)

Ahora debemos calcular $2^{n-3} + 2^{n-4} + ... + 2^1 + 2^0$

Sea $S = 2^{n-3} + 2^{n-4} + ... + 2^1 + 2^0$; si multiplicamos por 2 obtenemos

$2S = 2^{n-2} + 2^{n-3} + ... + 2^2 + 2^1$ y restando obtenemos $S = 2^{n-2} - 1$

Si reemplazamos en (*) obtenemos: $a_{n+1} = 3(2^{n-2} - 1) + 3 = 3 \cdot 2^{n-2}$

Observación.
Note el uso del Segundo Principio de la Inducción y de validez de la proposición a partir del natural 3

4.1.3 SUMA Y MULTIPLICACION EN N
ADICION EN LOS NATURALES

Se define la adición en N por: $\begin{cases} a)\ n + 1 = n^+ \\ b)\ \text{n + m}^+ = (n+m)^+ \end{cases}$

Ejemplo.
Demuestre que $n + 1 = 1 + n\ \ \forall\, n \in N$
Demostración.

La demostración se debe realizar por inducción sobre n y usaremos tanto n^+ como su igual $n+1$

Sea $P(n): n + 1 = 1 + n$: Por demostrar: a) $P(1)$ V b) $P(k)$ V $\Rightarrow P(k^+)$ V

a) $P(1)$ V ya que $1+1=1+1$

b) Si $P(k)$ es V , es decir, si $k+1=1+k$ debemos demostrar que $P(k^+)$ es V , es decir, debemos demostrar que $k^+ +1=1+k^+$.

Tenemos: $k^+ +1=(k+1)+1=(1+k)+1=1+k^+$

Proposición.

Para todo $n, m, p \in N$ **se cumple:**

a) $n+m \in N$

b) $m+(n+p)=(m+n)+p$

c) $m+n=n+m$

d) Si $m+p=n+p$ **entonces** $m=n$

Demostración.

Demostraremos sólo la propiedad c, el resto de la proposición queda como ejercicios. En la demostración, además de la definición de adición usamos, en particular, la asociatividad

Sea m un natural arbitrario, pero fijo y $P(n): n+m=m+n$

Debemos demostrar: a) $P(1)$ es V b) $P(k)$ V $\Rightarrow P(k^+)$ V

a) $P(1)$ es V ya que $1+m=m+1$ (ya se demostró)

b) Si $P(k)$ es V , es decir, si $k+m=m+k$, debemos demostrar que $P(k^+)$ es V , es decir, debemos demostrar que $k^+ +m=m+k^+$

Veámoslo

$k^+ +m=(k+1)+m=k+(1+m)=(k+m)+1=(m+k)+1=m+k^+$

MULTIPLICACION EN LOS NATURALES

Se define la multiplicación en N por: $\begin{cases} a)\ n \cdot 1 = n \\ b)\ n \cdot m^{+} = n \cdot m + n \end{cases}$

Proposición.

Para todo $n, m, p \in N$ **se cumple:**

a) $n \cdot m \in N$

b) $m \cdot n = n \cdot m$

c) $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$

d) Si $m \cdot p = n \cdot p$ **entonces** $m = n$

Además, se cumple:

e) $(m+n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$

Demostración.

Demostraremos sólo la parte e) de la proposición, asumiendo ya demostradas las otras propiedades

Supongamos que m , n son números naturales arbitrarios pero fijos y realicemos inducción sobre p

Sea $P(p) : (m+n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$.

Debemos demostrar que a) $P(1)$ es V b) $P(k)$ V $\Rightarrow P(k^{+})$ V

a) $P(1)$ es V ya que $(m+n) \cdot 1 = m \cdot 1 + n \cdot 1 = m + n$

b) Si $(m+n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$ debemos demostrar que $(m+n) \cdot k^{+} = m \cdot k^{+} + n \cdot k^{+}$

$$\begin{aligned} (m+n) \cdot k^{+} &= (m+n) \cdot k + (m+n) \\ &= m \cdot k + n \cdot k + m + n \\ &= m \cdot k + (n \cdot k + n) + m \\ &= (m \cdot k + m) + (n \cdot k + n) \end{aligned}$$

$$= m \cdot k^{+} + n \cdot k^{+}$$

4.1.4 Ejercicios Propuestos

1) Si n es un número natural, demuestre la validez en N:

a) $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

d) $1 + 4 + 7 + ... + (3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

e) $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2(2^n - 1)$

f) $1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

g) $(1 + +2 + 3 + ... + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

h) $(n^3 - n)$ es divisible por 3

i) $(6^{n+1} + 4)$ es divisible por 5

j) $5^n - 2^n$ es divisible por 3

k) $x^n - y^n$ es divisible por $x - y$

l) $n^3 + 2n$ es divisible por 3

2) Probar que cada una de las siguientes proposiciones se cumple en N

a) $n < 2^n$

b) $3^n \geq 2n + 1$

c) $2n \leq 2^n$

d) $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $(x + y) \neq 0$

e) $1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + ... + nr^{n-1} = \dfrac{1 - (n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2}$

3) Demuestre que las siguientes afirmaciones se cumplen para todo natural n

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+...+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$

b) $1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+..+n\cdot 3^{n-1}=\frac{(2n-1)3^n+1}{4}$

c) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

d) $\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{3}{4\cdot 5\cdot 6}+....+\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}$

4) Use Inducción en los siguientes casos

a) Sea $(a_n)_{n\in N}$ tal que $a_1=2$ y $a_n=3a_{n-1}$ para todo $n>1$. Demuestre que

$a_n=2\cdot 3^{n-1}$ para todo natural $n>1$

b) Sea $(a_n)_{n\in N}$ tal que $a_1=2$ y $a_n=a_{n-1}$ para todo $n>1$. Demuestre que

$a_n=\frac{3+(-1)^{n+1}}{3+(-1)^n}$ para todo natural $n>1$

c) Sea $(a_n)_{n\in N}$ tal que $a_1=1, a_2=1$ y $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $\forall\, n\geq 3$

Demuestre que $a_n<\left(\frac{7}{4}\right)^n$

5) Use inducción para demostrar:

a) $(1+h)^n>1+nh$, $\forall\, h\in\Re^+$, $n\geq 2$

b) $n^2>2n+1$ $\forall\, n\geq 3$

6) Demuestre:

a) $m+n\neq m$ $\forall\, m,n\in N$

b) $(m+n^+)^+=m^+ + n^+$ $\forall\, m,n\in N$

c) $m+(n+p)=(m+n)+p$ $\forall\, m,n,p\in N$

d) $(m\cdot n^+)^+=m\cdot n+m^+$ $\forall\, m,n\in N$

e) $m^+ + n^+=(m+n)^+ +1$ $\forall\, m,n\in N$

4.2 SUMATORIAS
4.2.1 Sumatoria simple
Definición

Una *sucesión real* es toda función con dominio un subconjunto de los números naturales y con valores en $\Re$, simbólicamente, la sucesión "a" es $a : N \to \Re$ tal que $n \mapsto a(n) = a_n$

Observación.

Denotamos la sucesión "a" por $(a_n)_{n\in N}$, donde a_n es el término general de la sucesión

Ejemplo

Para la sucesión $\left((-1)^n 2^n\right)_{n\in n}$, los tres primeros términos son: $a_1 = (-1)^1 2^1 = -2$, $a_2 = (-1)^2 2^2 = 4$, $a_3 = (-1)^3 2^3 = -8$

Definición.

Sea $(a_n)_{n\in N}$ una sucesión, definimos la sumatoria de los n primeros términos de la sucesión, denotada $\sum_{i=1}^{n} a_i$, por:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \begin{cases} \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 & \text{si} \quad n = 1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n & \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

Observación.

Usando la definición de sumatoria y las propiedades de los números reales podemos escribir:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n = \left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i + a_{n-1}\right) + a_n = \left(\left(\sum_{i=1}^{n-3} a_i + a_{n-2}\right) + a_{n-1}\right) + a_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Ejemplo.

Desarrolle y calcule $\sum_{i=1}^{3} a_i$ considerando la sucesión $(2n+3)_{n\in N}$

Solución

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{i=1}^{3} (2i+3) = (2\cdot 1 + 3) + (2\cdot 2 + 3) + (2\cdot 3 + 3) = 5 + 7 + 9 = 21$$

¿Si nos interesa $\sum_{i=1}^{75} a_i$?. Necesitamos un poco más de teoría

4.2.1.1 Propiedades de la sumatoria simple
Proposición.

Sean $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$ dos sucesiones y $p \in \Re$, se cumple:

a) Si $a_n = p \ \forall \ n \in N$ entonces $\sum_{i=1}^{n} a_n = \sum_{i=1}^{n} p = np$

b) Si $(c_n)_{n\in N}$ es una sucesión tal que $c_n = pa_n \ \forall \ n \in N$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} pa_i = p\sum_{i=1}^{n} a_i$$

c) Si $(d_i)_{n\in N}$ es una sucesión tal que $d_n = a_n + b_n \ \forall \ n \in N$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

d) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$ (Propiedad telescópica)

e) $\sum_{i=j}^{n} a_i = \sum_{i=j+r}^{n+r} a_{i-r}$ (Propiedad del reloj)

Demostración.

Sólo demostraremos la propiedad b)

Sea $P(n): \sum_{i=1}^{n} pa_i = p\sum_{i=1}^{n} a_i$

Debemos demostrar: a) $P(1)$ V b) $\left[P(1), P(2), ..., P(k)\right]$ V $\Rightarrow P(k+1)$ V

a) $P(1)$ es V ya que $\sum_{i=1}^{1} pa_i = \sum_{i=1}^{1} c_i = c_1 = pa_1 = p\sum_{i=1}^{1} a_i$

b) Si $\sum_{i=1}^{r} pa_i = p\sum_{i=1}^{r} a_i$, $\forall$ r $\leq$ k debemos demostrar que $\sum_{i=1}^{k+1} pa_i = p\sum_{i=1}^{k+1} a_i$

Veámoslo

$$\sum_{i=1}^{k+1} pa_i = \sum_{i=1}^{k+1} c_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} c_i + c_{k+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} pa_i + pa_{k+1}$$

$$= p\sum_{i=1}^{k} a_i + pa_{k+1}$$

$$= p\left[\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}\right]$$

$$= p\sum_{i=1}^{k+1} a_i$$

4.2.1.2 Algunas sumatorias importantes.

a) $1+2+3+4+.....+(n-1)+n = \sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2+2^2+3^2+4^2+...+(n-1)^2+n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3+2^3+3^3+4^3+...+(n-1)^3+n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Observación.

Estas fórmulas que nos permiten sumar sin sumar, ya fueron demostradas por inducción, sin embargo, es necesario mostrar algún camino que nos lleve a deducirlas, como un ejemplo deduciremos la suma de los cuadrados de los primeros n naturales

Consideremos $\sum_{i=1}^{n} (i+1)^3$, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)^3 = \sum_{i=1}^{n}(i^3+3i^2+3i+1) = \sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{i=1}^{n} 3i^2 + \sum_{i=1}^{n} 3i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

Asumiendo conocida la suma de los primeros n naturales y considerando además que al comparar $\sum_{i=1}^{n}(i+1)^3$ con $\sum_{i=1}^{3} i^3$ se simplifica su diferencia, podemos despejar $\sum_{i=1}^{n} i^2$; así:

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)^3 = \sum_{i=1}^{n}(i^3+3i^2+3i+1) = \sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{i=1}^{n} 3i^2 + \sum_{i=1}^{n} 3i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(i+1)^3 - \sum_{i=1}^{n} i^3 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\Rightarrow (n+1)^3 - 1 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\Rightarrow (n+1)^3 - 1 - n - 3\frac{n(n+1)}{2} = 3\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)^3 - (n+1) - 3\frac{n(n+1)}{2}}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ejemplos.

1) Calcule, usando las propiedades: $\sum_{i=1}^{10}(4i^2+2)$

Solución.

$$\sum_{i=1}^{10}(4i^2+2) = \sum_{i=1}^{10} 4i^2 + \sum_{i=1}^{10} 2 = 4\sum_{i=1}^{10} i^2 + 10\cdot 2 = 4\frac{10(10+1)(10\cdot 2+1)}{6} + 20 = 1.560$$

2) Determine la suma de los 20 primeros términos de la sucesión cuyos 5 primeros

términos son: 1, 3, 5, 7, 9

Solución.

Sea $(a_n)_{n\in N}$ la sucesión tal que $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 9$, es

inmediato deducir que $a_n = 2n-1$, de donde:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{20} = \sum_{i=1}^{20} a_i = \sum_{i=1}^{20}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{20} i - 20\cdot 1 = 2\frac{20(20+1)}{2} - 20 = 401$$

3) Determine una fórmula para $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

Solución.

Para resolver este problema necesitamos descomponer la fracción racional $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ en fracciones parciales.

Informalmente introduciremos las acciones básicas relacionadas con este tema, el cual se presentará en un Capítulo posterior

En primer lugar notemos que la fracción racional dada tiene como denominador un polinomio de grado mayor que le polinomio del numerador y, además, que el numerador esta factorizado en polinomios lineales irreducibles; cada uno de estos factores lineales genera una fracción parcial del tipo $\frac{A}{ax+b}$, de tal manera que debemos encontrar el valor real de A.

Tenemos:

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A(k+2)+B(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$\Rightarrow 1 = A(k+2)+B(k+1) \quad (*)$$

Si damos valores arbitrarios a k, sucesivamente, podemos determinar A y B

Si $k=-1$ entonces (*) queda: $1 = A$

Si $k=-2$ entonces (*) queda: $1 = -B$

Entonces: $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$, de donde

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

Si consideramos la sucesión $\left(\frac{1}{n+2} \right)_{n \in N}$, usando la propiedad telescópica

$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$ tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = -\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n}{2(n+1)}$$

Demostremos que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$ se cumple en N

Sea $P(n):\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$

a) $P(1)$ es V ya que $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}$, y por otro lado $\frac{1}{2(1+2)}=\frac{1}{6}$

b) Si se cumple que $\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{p}{2(p+2)}$ debemos demostrar que $\sum_{k=1}^{p+1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{p+1}{2(p+3)}$. Veámoslo:

$$\sum_{k=1}^{p+1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\sum_{k=p+1}^{p+1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{p}{2(p+2)}+\frac{1}{(p+2)(p+3)}$$

$$=\frac{p(p+3)+2}{2(p+2)(p+3)}=\frac{p^2+3p+2}{2(p+2)(p+3)}=\frac{p+1}{2(p+3)}$$

4) Calcule, usando fórmulas, la suma de todos los números impares entre 100 y 500
Solución.
Queremos los números impares desde 101 hasta 499. Si escribimos un número impar como $2k-1$ entonces la suma pedida es $\sum_{k=55}^{250}(2k-1)$; tenemos:

$$\sum_{k=51}^{250}(2k-1)=\sum_{k=51-50}^{250-50}[2(k+50-1]=\sum_{k=1}^{200}(2k+99)=2\sum_{k=1}^{200}k+\sum_{k=1}^{200}99$$

$$=2\frac{200(201)}{2}+200(99)=$$

5)Determine una fórmula para $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k$ y demuestre la validez de ésta en N

Solución.

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k=-1+2-3+4-5.........-(2n-1)+2n$$

$$=-(1+3+5+....+(2n-1))+(2+4+6+.....+2n)$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+\sum_{k=1}^{n}2k=\sum_{k=1}^{n}(-2k+1+2k)=n$$

Veamos ahora la inducción pedida

Sea $P(n): \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = n$

a) Como $\sum_{k=1}^{2\cdot 1} (-1)^k k = -1 + 2 = 1$ entonces se cumple $P(1)$

b) Si $P(r)$ se cumple, es decir, si $\sum_{k=1}^{2r} (-1)^k k = r$, debemos demostrar que

$P(r+1)$ también se cumple, es decir, debemos demostrar que $\sum_{k=1}^{2(r+1)} (-1)^k k = r+1$

$$\sum_{k=1}^{2(r+1)} (-1)^k k = \sum_{k=1}^{2r+2} (-1)^k k = \sum_{k=1}^{2r} (-1)^k k - (2r+1) + (2r+2) = r - (2r+1) + (2r+2) = r+1$$

4.2.2 SUMATORIA DOBLE

4.2.2.1 Definición de sumatoria doble

Supongamos el siguiente arreglo rectangular de números:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & .. & .. & .. & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & .. & .. & .. & .. & a_{2m} \\ .. & & & & & & \\ .. & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & .. & .. & .. & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Si sumamos los términos de la primera fila obtenemos: $\sum_{j=1}^{m} a_{1j}$

Si sumamos los términos de la segunda fila obtenemos: $\sum_{j=1}^{m} a_{2j}$

.

Si sumamos los términos de la n-ésima fila obtenemos: $\sum_{j=1}^{m} a_{nj}$

Ahora, si sumamos estas sumas obtenemos: $\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} a_{ij})$

Por otro lado

Si sumamos los términos de la primera columna obtenemos: $\sum_{i=1}^{n} a_{i1}$

Si sumamos los términos de la segunda columna obtenemos: $\sum_{i=1}^{n} a_{i2}$

.

Si sumamos los términos de la m-ésima columna obtenemos: $\sum_{i=1}^{n} a_{im}$

Ahora, si sumamos estas sumas obtenemos: $\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij})$

Naturalmente que estas sumas dobles son iguales (forman la suma de todos los términos del arreglo) por lo que podemos afirmar que (aceptando como definición)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

4.2.2.2 Propiedades de la sumatoria doble

Se cumple:

a) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k = nmk \, , k \in \Re$

b) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} ka_{ij} = k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, , k \in \Re$

c) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j) = n\sum_{j=1}^{m} b_j + m\sum_{i=1}^{n} a_i$

d) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{m} b_j)$

Observación.

Si aplicamos la suma iterada a la sumatoria doble podemos mostrar las propiedades, por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i + b_j) = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m}(a_i + b_j)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[ma_i + \sum_{j=1}^{m} b_j\right] = m\sum_{i=1}^{n} a_i + n\sum_{j=1}^{m} b_j$$

Ejemplo.

Calcule $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(2i+j)$

Solución.

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(2i+j)=3\sum_{j=1}^{4}j+4\sum_{i=1}^{3}2i=3\frac{4(4+1)}{2}+4\cdot 2\frac{3(3+1)}{2}=78$$

4.2.3 EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Si se sabe que $\sum_{i=1}^{6}(2x_i-3)=18$; $\sum_{i=1}^{5}(x_i-6)^2=182$ y $x_6=8$, determine el valor de $\sum_{i=1}^{6}x_i^2$ Resp. 184

2) Sabiendo que $\sum_{i=1}^{n}a_i=2n^2+3n$ encuentre el valor de $\sum_{i=1}^{6}\frac{a_i-5}{3}$ y a_3
Resp. 20 ; 13

3) Determine el valor de $\sum_{i=5}^{15}i(i-3)$

4) Si se sabe que $\sum_{i=1}^{7}x_i^2=196$; $\sum_{i=1}^{10}(2x_i-3)^2=1130$; $x_8=x_9=-3$ $x_{10}=5$, determine el valor de $\sum_{i=1}^{7}x_i$

5) Si $\sum_{i=1}^{6}(2x_i-1)^2=4$; $\sum_{i=1}^{7}(x_i+1)(x_i-1)=129$ y $x_7=-4$, determine el valor de $\sum_{i=1}^{7}(2x_i-5)\sum_{i=1}^{6}(2x_i+3)^2$

6) Encuentre una fórmula que permita sumar los n primeros términos de la sucesión:

a) $(2n-1)_{n\in N}$ Resp. n^2
b) $(6n^3)_{n\in N}$ Resp. $n(n+1)(2n+1)$

7) Calcule:

a) $3+6+...+198$ Resp. 6.633

b) $-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+6^2-.....-99^2+100^2$

c) $2+4+6+8+....+200$ Resp. 10.100

d) $1+3+5+7+9+....+199$ Ressp. 10.000

e) $-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+6^2-.....-99^2+100^2$

8) Calcule:

a) $\sum_{i=1}^{100}\left[\frac{1}{i(i+1)}-\frac{1}{(i+1)(i+2)}\right]$ Resp. $\frac{2.575}{5.151}$

b) $\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{k}{k+1}-\frac{k-1}{k}\right]$ Resp. $\frac{100}{101}$

c) $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)Ln(k+1)-kLnk\right]$ Resp. $(n+1)Ln(n+1)$

9) Usando descomposición en fracciones parciales y propiedad telescópica, determine una fórmula para:

a) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$ Resp. $\frac{n}{n+1}$

b) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i+3)(2i+1)}$ Resp. $\frac{n}{3(2n+3)}$

c) $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{k(k+1)(k+2)}$ Resp. $\frac{3}{4}-\frac{4n+3}{2(n+1)(n+2)}$

d) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k(k+1)2^k}$ Resp. $1-\frac{1}{(n+1)2^n}$

e) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+3)}$ Resp. $\frac{7}{36}-\frac{1}{6(n+1)}+\frac{1}{6(n+2)}+\frac{1}{6(n+3)}$

10) Resuelva la ecuación $x^2\sum_{i=1}^{5}(2i^2+i+1)-\sum_{i=1}^{4}(i+3i^2)=x\sum_{i=1}^{3}(2i^2+8i)$

11) Determine el valor de las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{i=1}^{6}(3i-5)$ b) $\sum_{i=1}^{5}\frac{(i+3)}{i}$ c) $\sum_{i=1}^{6}(i-3)(2i+5)$ d) $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=2}^{6}(i-2)(j+2)$

e) $\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=1}^{3}(2i-3i)(\frac{i+2}{j})$

12) Si se sabe que $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 30$; $\sum_{i=1}^{5} x_i = 18$, determine el valor de $\sum_{i=1}^{5}(x_i - 2)^2$

Resp. -22

13) Sí $\sum_{i=1}^{6}(a_i - 3)^2 = \sum_{i=1}^{6}(a_i + 2)^2$ y $\frac{\sum_{i=1}^{6} a_i^2}{\sum_{i=1}^{6} a_i} = 10$, determine el valor de $\sum_{i=1}^{6} a_i(a_i - 3)$

Resp. 21

14) Dado $\sum_{i=1}^{10}(2x_i - 3)^2 = 1130$; $\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 196$; $x_8 = 3$; $x_9 = 3$; $x_{10} = -5$. ¿Cuál es el valor de $\sum_{i=1}^{7} x_i$? Resp. -11

15) Sí $\sum_{i=1}^{4} x_i = 12$; $\sum_{i=1}^{4} x_i(2 - 3x_i) = -306$, determine el valor de $\sum_{i=1}^{4}(x_i + 2)^2$

Resp. 174

16) Dado $\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 25$ y $\sum_{i=1}^{8} x_1 = 12$, determine el valor "k" si $\sum_{i=1}^{8}(4x_i - 2k)^2 = 4.000$

Resp. $k = 0$, $k = 6$

17) Calcular el valor de la constante "c", si se sabe que: $\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{5}(2x_i - 3y_j + c) = 6.000$, $\sum_{i=1}^{6} x_i = 18$; $\sum_{j=1}^{5} y_j = 22$. Resp. 207,2

4.3 PROGRESIONES

4.3.1 Progresión Aritmética

Definición.

Una sucesión real $(a_n)_{n\in N}$ se llama Progresión Aritmética, denotada P.A. si:

$$\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_{n+1} = a_n + d \ , \text{ para algún } d \in \Re - \{0\}, \forall n \in N \end{cases}$$

Observación.

1) a_1 se llama "primer elemento de la P.A."

2) $d = a_{n+1} - a_n$ se llama "diferencia de la P.A."

3) Si $d > 0$ entonces la P.A. es creciente
Si $d < 0$ entonces la P.A. es decreciente

4) Si a,b,c están en P.A. entonces $b - a = c - b$, es decir, $2b = a + c$

Ejemplos.

1) la sucesión de los números naturales es una P.A. con primer elemento $a_1 = 1$ y diferencia $d = 1$

2) La sucesión formada por los números: $7,5,3,1,-1,-3,-5,....$ es una P.A. con primer elemento $a_1 = 7$ y diferencia $d = -2$. Observe que: $-2 = 5 - 7 = 3 - 5 = -1 - 1 = ...$

4.3.1.1. Teorema regulatorio

Teorema.

Si $(a_n)_{n\in N}$ es una P.A. con primer elemento a_1 y diferencia d entonces:

a) $a_n = a_1 + (n-1)d$, $n \in N$

b) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$

Demostración a)

Sea $P(n): a_n = a_1 + (n-1)d$

a) $P(1)$ es V ya que $a_1 = a_1 + (1-1)d$

b) Si $P(k)$ es verdadero, es decir, si $a_k = a_1 + (k-1)d$, debemos demostrar que $P(k+1)$ también es verdadero , es decir, debemos demostrar que $a_{k+1} = a_1 + ((k+1)-1)d$; veámoslo:

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd$$

Demostración b)

Usaremos el Segundo Principio de Inducción Matemática.

Sea $P(n): \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$, debemos demostrar:

a) $P(1)$ V b) Si $P(n)$ es V $\forall n \in N$, $n \le k$, entonces $P(n+1)$ V

a) $P(1)$ es verdadero ya que $\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$ y por otro lado $\frac{1}{2}\left[2a_1 + (1-1)d\right] = a_1$

b) Si $P(n)$ es V $\forall n \in N$, $n \le k$ entonces se cumple $\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$, debemos

demostrar que $P(n+1)$ es verdadero, es decir, que $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \frac{n+1}{2}\left[2a_1 + nd\right]$

Veámoslo.

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{n+1} a_i$$

$$= \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] + a_{n+1}$$

$$= \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] + a_1 + nd$$

$$= na_1 + \frac{n}{2}(n-1)d + a_1 + nd$$

$$= (n+1)a_1 + \left[\frac{n}{2}(n-1) + n\right]d$$

$$= (n+1)a_1 + \frac{n(n+1)}{2}d$$

$$= \frac{n+1}{2}\left[2a_1 + nd\right]$$

Ejemplos.

1) En una P.A. cuyos tres primeros términos son: 5, 11, 17 determine:
   a) el quinto término
   b) la suma de los 17 primeros términos

Solución.

Como $a_1 = 5$ y $d = 11 - 5 = 6$ entonces:

a) $a_5 = a_1 + 4d = 5 + 4 \cdot 6 = 29$ b) $\sum_{i=1}^{17} a_i = \frac{17}{2}[2 \cdot 5 + 16 \cdot 6] = 901$

2) Interpolar(intercalar) ocho medios aritméticos entre 6 y 36

Solución.

Estamos considerando una P.A. donde el primer término es $a_1 = 6$ y el décimo término es $a_{10} = 36$. Necesitamos la diferencia d

Como $a_{10} = a_1 + 9d$ entonces $36 = 6 + 9d$ de donde $d = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$, así, los términos pedidos son: $a_2 = 6 + 3\frac{1}{3} = 9\frac{1}{3}$, $a_3 = 9\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} = 12\frac{2}{3}$ o $a_3 = 6 + 2(3\frac{1}{3}) = 12\frac{2}{3}$

$a_4 = 16$, $a_5 = 19\frac{1}{3}$, $a_6 = 22\frac{2}{3}$, $a_7 = 26$, $a_8 = 29\frac{1}{3}$, $a_9 = 32\frac{2}{3}$

3) Determinar tres números cuya suma sea 15 y la suma de los cuadrados sea 83.
Solución.

Consideremos: $a_1 = x - d$, $a_2 = x$, $a_3 = x + d$ los tres números en P.A.

Como $(x-d) + x + (x+d) = 15$ entonces $x = 5$, así los números son:

$a_1 = 5 - d$, $a_2 = 5$, $a_3 = 5 + d$.

Dado que la suma de los cuadrados de los números debe ser igual a 83 entonces obtenemos la ecuación $(5-d)^2 + 5^2 + (5+d)^2 = 83$; al resolver esta ecuación de segundo grado obtenemos: $d_1 = 2$, $d_2 = -2$

Si $d = 2$, $x = 5$ tenemos $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$; una P.A. creciente

Si $d = -2$, $x = 5$ tenemos $a_1 = 7$, $a_2 = 5$, $a_3 = 3$; una P.A. decreciente

4.3.2 PROGRESION GEOMETRICA

Definición.

Una sucesión real $(a_n)_{n\in N}$ se llama Progresión Geométrica, denotada P.G. si:

$$\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_{n+1} = a_n \cdot r \ \text{, para algún } r \in \Re - \{1\}, \forall n \in N \end{cases}$$

Observación.

1) a_1 se llama “”primer elemento de la P.G.”
2) $r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ se llama “razón del P.G.”
3) Si $r > 1$ entonces la P.G. es creciente
   Si $0 < r < 1$ entonces la P.G. es decreciente
   Si $r < 0$ entonces la P.G. es oscilante
4) Si a,b,c están en P.G. entonces $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$, es decir, $b^2 = ac$

Ejemplos.

1) La sucesión cuyos primeros términos son: 2, 4, 8, 16, 32, 64,....es una P.G., donde el primer término es $a_1 = 2$ y la razón es $r = 2 = \dfrac{4}{2} = \dfrac{8}{4} = \dfrac{64}{32} = ...$
2) Si los 4 primeros términos de una P.G. son 3, -6, 12, -24 entonces el primer término es $a_1 = 3$ y la razón es $r = -2$

4.3.2.1 Teorema regulatorio

Teorema

Si $(a_n)_{n\in N}$ es una P.G. con primer elemento a_1 y razón $r \neq 1, r \neq 0$ entonces:

a) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, $n \in N$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Demostración.

Veamos, antes de realizar la demostración, la forma en que se producen las fórmulas propuestas.

a) $a_1 = a_1$
   $a_2 = a_1 \cdot r$
   $a_3 = a_2 \cdot r = (a_1 \cdot r) \cdot r = a_1 \cdot r^2$

$$a_4 = a_3 \cdot r = (a_1 \cdot r^2) \cdot r = a_1 \cdot r^3$$

Resulta inmediato creer que $a_a = a_1 \cdot r^{n-1}$

b) $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$, es decir

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + ... + a_1 \cdot r^{n-2} + a_1 \cdot r^{n-1}$$

Si multiplicamos esta última igualdad por r obtenemos

$r\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + ... + a_1 \cdot r^{n-2} + a_1 \cdot r^{n-1} + a_1 \cdot r^n$; al restar las dos expresiones tenemos: $\sum_{i=1}^{n} a_i - r\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 - a_1 \cdot r^n$, así. $(1-r)\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1(1-r^n)$, de donde, finalmente

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

Demostremos ahora, por inducción, las formulas obtenidas

a) Sea $P(n): a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ entonces:

i) $P(1)$ es verdadero ya que $a_1 = a_1 \cdot r^{1-1}$

ii) Si $P(k)$ es verdadero, es decir si $a_k = a_1 \cdot r^{k-1}$ debemos demostrar que $a_{k+1} = a_1 \cdot r^k$, veamos esto último

$$a_{k+1} = a_k \cdot r = (a_1 \cdot r^{k-1}) \cdot r = a_1 \cdot r^k$$

b) Sea $P(n): \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$

i) $P(1)$ es verdadero ya que $\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 = a_1 \frac{1-r^1}{1-r}$

ii) Si $P(k)$ es verdadero, es decir si $\sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 \frac{1-r^k}{1-r}$ debemos demostrar que $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = a_1 \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$; tenemos:

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1} = a_1 \frac{1-r^k}{1-r} + a_1 \cdot r^k = a_1(\frac{1-r^k}{1-r} + r^k)$$

$$= a_1 \frac{1-r^k + r^k - r^{k+1}}{1-r} = a_1 \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$$

Ejemplos.

1) En una P.G. cuyos tres primeros términos son 3, 6, 12, determine
   a) el quinto término
   b) la suma de los diez primeros términos

Solución.

Como el primer término de la P.G. es $a_1 = 3$ y la razón es $r = 2$ entonces:

a) $a_5 = a_1 \cdot r^4 = 3 \cdot 2^4 = 48$ b) $\sum_{i=1}^{10} a_i = a_1 \dfrac{1-r^{10}}{1-r} = 3\dfrac{1-2^{10}}{1-2} = 3.069$

2) ¿Qué lugar ocupa el término de valor $\dfrac{27}{4}$ en una P.G. que tiene primer elemento con valor $\dfrac{4}{3}$ tal que la razón es $r = \dfrac{3}{2}$?

Solución.

Como $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ entonces queremos n, tal que $\dfrac{27}{4} = \dfrac{4}{3} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\dfrac{27}{4} = \dfrac{4}{3} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \dfrac{27}{4} \cdot \dfrac{3}{4} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{4} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$, así, $n = 5$ y entonces el quinto término tiene valor $\dfrac{27}{4}$

3) La suma de tres números en P.G. es 70, si se multiplica los dos extremos por 4 y el término central por 5 entonces los nuevos números están en P.A. Determine los números originales,

Solución.

Si denotamos por a al primer número entonces, los otro números son ar y ar^2. Por los datos disponibles obtenemos la ecuación $a + ar + ar^2 = 70$

Por otro lado, los números $4a$, $5ar$, $4ar^2$ quedan en P.A. y entonces, la ecuación que podemos deducir es $5ar - 4a = 4ar^2 - 5ar$ (ambos lados son igual a d) ; arreglando esta última expresión obtenemos $4ar^2 - 10ar + 4a = 0$

Como $a \neq 0$ entonces la ecuación queda $4r^2 - 10r + 4 = 0$, la cual tiene solución $r = 2$, $r = \dfrac{1}{2}$.

Reemplazando en la primera ecuación deducida obtenemos:

$r = 2 \Rightarrow a + 2a + 4a = 70 \Rightarrow a = 10$, así, los números pedidos son 10, 20, 40

$r = \frac{1}{2} \Rightarrow a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a = 70 \Rightarrow a = 40$, así, los números pedidos son 40, 20, 10

4) Los recíprocos de $b - a,\ 2b,\ b - c$ forman una Progresión Aritmética, demuestre que $a,\ b,\ c$ están en Progresión Geométrica.

Demostración.

Si $\frac{1}{b-a},\ \frac{1}{2b},\ \frac{1}{b-c}$ están en P.A. entonces se cumple $\frac{1}{2b} - \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{2b}$, usando ésta igualdad debemos probar que $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, es decir, que $b^2 = ac$

Si $\frac{1}{2b} - \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{2b}$ entonces $\frac{b-a-2b}{2b(b-a)} = \frac{2b-(b-c)}{2b(b-c)}$, es decir $\frac{-b-a}{b-a} = \frac{b+c}{b-c}$, al seguir trabajando obtenemos $b^2 = ac$

4.3.3 PROGRESION ARMONICA

Definición.

Una sucesión real $(a_n)_{n \in N}$ se llama Progresión Armónica, denotada P.H., si $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \in N}$ es una Progresión Aritmética; $a_n \neq 0, \forall n$

Ejemplos.

1) La sucesión: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{\mathrm{n}}, \ldots$ es una P.H. ya que la sucesión formada por los recíprocos $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ es una P.A.

2) Si los números x, y, z están en P.H. demuestre que $y = \frac{2xz}{x+z}$

   Demostración.

   Si x, y, z están en P.H. entonces $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ están en P.A.

   Si $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ están en P.A. entonces $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{z} - \frac{1}{y}$ de donde $\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$,

   finalmente: $y = \frac{2xz}{x+z}$

4.3.4 EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Se sabe que los dos primeros términos de una P.A. son $a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = \frac{2}{3}$

   Determine: a) a_5 b) a_{x-2} c) $\sum_{i=1}^{15} a_i$

2) Sea $(a_n)_{n\in N}$ una P.A. Sabemos que:

   a) La suma del tercer y cuarto término es igual a 43 y que la diferencia entre el octavo término con el quinto término e igual a 9 $(a_8 - a_5 = 9)$; determine el primer término.

   b) La suma del cuarto término con el sexto término es igual a 8 y la suma del quinto y noveno término es igual a 9. Determine el segundo término

   c) La diferencia d es el 40% de a_1. Exprese a_2 como porcentaje de la suma de los 10 primeros términos.

   d) El primer término es –2, el último término es 29 y la suma es 155. Cuál es la diferencia d?

   e) El tercer término es igual al cuádruple del primero y el sexto término tiene valor 17. Determine la progresión.

3) Sea $A = \left\{ a_i \,/\, a_i = \frac{1-\sqrt{2}}{2} + \frac{(i-1)\sqrt{2}}{2}, 1 \le i \le n, n \in N \right\}$

   a) Demuestre que los elementos de A están en P.A.

   b) Determine $\sum_{k=1}^{i} a_k$

4) ¿Cuántos términos de la P.A. cuyos tres primeros términos son $-6\frac{4}{5}, -6\frac{2}{5}, -6$ se deben sumar para obtener $-52\frac{4}{5}$?

5) La suma de tres números en P.A. es 39 y su producto es 2.184. Determine los números.

6) La suma de 5 números en P.A. es 40 y la suma de sus cuadrados es 410. Determine los números

7) La suma de los p primeros términos de una P.A. es q, y la suma de los q primeros términos es p: Calcule la suma de los $p+q$ primeros términos.

8) Sumar los n primeros términos de las siguientes P.A.

   a) $2\sqrt{3}\,, 3\sqrt{3}\,, 4\sqrt{3}\,, ...$

   b) $\dfrac{6}{\sqrt{2}}\,, 10\sqrt{2}\,, \dfrac{14}{\sqrt{2}}\,, ...$

   c) $2a-b\,, 4a-3b\,, 6a-5b\,, ...$

   d) $\dfrac{a+b}{2}\,, a\,, \dfrac{3a-b}{2}\,, ...$

   e) $\dfrac{2a^2-1}{a}\,, 4a-\dfrac{3}{a}\,, \dfrac{6a^2-5}{a}\,, ...$

   f) $\dfrac{1+k}{1-k}\,, \dfrac{4\mathrm{k}}{1\text{ - }\mathrm{k}^2}\,, ...$

9) La suma de tres números en P.A es 12 y la suma de sus cubos es 408, determine los números.

10) Demostrar que la suma de un número impar de términos de una P.A. es igual al término central multiplicado por el número de términos.

11) Verificar que el cuadrado de las cantidades $a^2-2a-1, a^2+1, a^2+2a-1$ forman una P.A.

12) Una empresa tiene una producción de 20.000 unidades en el primer año e incrementa su producción, cada año, en 1.200 unidades.
    a) ¿Cuánto producirá el quinto año?
    b) ¿Cuál será la producción total en los primeros 5 años?

13) La producción de una empresa es de 15.000 el primer año, luego la producción disminuye a razón de 750 por año.
    a) ¿Cuál es la producción total en los primeros cinco años?
    b) ¿Cuándo la producción será nula?
    c) ¿Cuánto habrá producido la empresa hasta que la producción sea nula?

14) Una empresa A tiene una producción inicial de 1.000 unidades y disminuye a razón de 100 unidades por año. Una empresa B tiene una producción inicial de 500 unidades(el año inicial es el mismo en ambas empresas) y aumenta su producción en 25 unidades cada año.
    a) ¿Cuándo serán iguales las producciones de A y B?
    b) ¿Cuándo será nula la producción de A?
    c) ¿Cuál será la producción de B ese mismo año?

15) En una P.G. la suma de tres términos es 224 y la suma de los extremos excede en 96 al término central. Calcule los números

16) Sea $(a_n)_{n\in N}$ una P.G.

a) Si $a_1 + a_2 = 28$ y $a_3 + a_4 = 175$ calcule el quinto término

b) Si $a_2 + a_3 = 30$ y $a_3 - a_1 = 8$ calcule el primer término

17) Sume los n primeros términos en cada una de las siguientes P.G.

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$

b) $1, 5, 25, \ldots$

c) $24, 12, 6, \ldots$

18) Interpolar 5 medios geométricos entre $3\frac{5}{9}$ y $40\frac{1}{2}$

19) Si a, b, c, d están en P.G. demuestre que $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$

20) Intercalar dos números reales entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{9}{4}$ de modo que los tres primeros formen una P.A. y los tres últimos formen una P.G.

21) Si x, y, z están en P.A. demuestre que $x \ + xy + y^2$, $y^2 + yz + z^2$, $z^2 + zx + x^2$ están en P.A.

22) Sean x, y, z tres números en P.A,. tales que su suma es 24. Si restamos uno al primer término y dos al segundo, los nuevos números quedan en P.G.; determine los números originales

23) Calcule la suma de todos los números impares entre 100 y 500

24) Si $\frac{a+b}{2}$, b , $\frac{b+c}{2}$ están en P.H. demuestre que a , b , c están en P.G.

25) Interpolar dos medios armónicos entre 5 y 11

26) Si 12 y 4.815 son los medios geométricos y armónicos, respectivamente, entre dos números; determine a estos números.

4.4 ANALISIS COMBINATORIO

Podemos considerar el *análisis combinatorio* como el conjunto de procedimientos y técnicas que nos permite determinar el número de subconjuntos que pueden formarse a partir de un conjunto dado, de acuerdo a ciertas instrucciones.

Estas deben indicar claramente como se diferencian dos subconjuntos entre si, de acuerdo a:

- la naturaleza de los elementos
- el orden de los elementos

Realizaremos el análisis combinatorio sin repetición, es decir, cada elemento debe aparecer una única vez en cada subconjunto.

4.4.1 PRINCIPIO DEL ANALISIS COMBINATORIO

Si un evento, hecho o suceso se realiza de "n" formas distintas y otro evento, independiente del anterior, se realiza de "r" formas distintas entonces, los dos eventos se realizan, conjuntamente, de "nr" formas distintas.

Observación.
Al Principio del Análisis Combinatorio también se le llama Principio Multiplicativo.

Ejemplo.
Si entre dos ciudades A y B existe una línea de buses que las une y que dispone de 10 máquinas en uso ¿De cuántas maneras una persona puede ir de A a B u volver en un bus distinto?
Solución.
Como ir de A a B se puede realizar de 10 maneras distintas y volver de B a A de puede hacer de 9 otras formas distintas entonces, realizar el viaje completo, en las condiciones planteadas, se realiza de $10 \cdot 9 = 90$ maneras

4.4.2 FACTORIAL DE UN NUMERO

Definición.

Sea $n \in N \cup \{0\}$. Definimos el factorial de n, denotado $n!$, que se lee "factorial de n" como:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Ejemplo.

$$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$$

Observación.

Es inmediato notar que $n! = n(n-1)(n-2) \cdot .... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Ejemplos.

1) Determine $\dfrac{x!}{(x-2)!}$

Solución.

$$\frac{x!}{(x-2)!} = \frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!} = x(x-1)$$

2) Solucione la ecuación $\dfrac{(x-1)! + 2(x+1)!}{x! - (x-1)!} = 13$

Solución.

$$\frac{(x-1)! + 2(x+1)!}{x! - (x-1)!} = 13 \Rightarrow \frac{(x-1)! + 2(x+1)x(x-1)!}{x(x-1)! - (x-1)!} = 13$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)!\left[1 + 2x(x+1)\right]}{(x-1)!(x-1)} = 13$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 2x(x+1)}{x-1} = 13$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 11x + 14 = 0$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{2} \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Naturalmente que la solución es $x = 2$

4.4.3 VARIACIONES

Sea A un conjunto con n elementos, llamamos variación de orden k, $k \le n$, a todo subconjunto ordenado de A que tenga k elementos

Observación.

Dos variaciones de orden k son diferentes tienen, al menos un elemento distinto o, si teniendo los mismos elementos, estos están en distinto orden

El número total de variaciones de orden k que se puede formar, seleccionado los elementos de un conjunto que tiene n elementos se denota $V(n,k)$ o V_n^k

Proposición.

El número de variaciones $V(n,k)$ es $V(n,k)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$

Demostración.

El primer lugar de la k-upla se puede llenar de n formas distintas

El segundo lugar de la k-upla se puede llenar de $n-1$ formas distintas

El tercer lugar de la k-upla se puede llenar de $n-2$ formas distintas

...

...

El k-ésimo lugar de la k-upla se puede llenar de $n-(k-1)$ formas distintas

Usando el Principio Multiplicativo, llenar los k lugares de la k-upla se puede realizar de $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot\left(n-(k-1)\right)$ formas, ahora:

$$V(n,k)= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot\left(n-(k-1)\right)\cdot\frac{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot\left(n-(k-1)\right)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Ejemplo.

¿Cuántas palabras de 3 letras se puede formar usando las letras a,b,c,d?

Solución.

Como el orden de las letras en cada palabra interesa entonces estamos frente a variaciones y la respuesta es: $V(4,3)=\dfrac{4!}{(4-3)!}=24$

Ejemplo.

¿Cuántas señales diferentes se puede formar, si disponemos de 6 banderas de colores diferentes las cuales se colocan en un mástil, una tras otra, si se puede usar cualquier número de ellas a la vez?

Solución.

Como el orden de las banderas en el mástil es importante entonces el problema es de variaciones y la respuesta es $\sum_{k=1}^{6} V(6,k)$

4.4.4 PERMUTACIONES

Una permutación de orden n es toda variación de orden n

Observación.

Dos permutaciones de orden n tienen los mismos elementos y son diferentes sólo por el distinto orden que presentan los elementos

Al número total de permutaciones de orden lo denotamos P_n

Proposición.

El número de permutaciones de orden n es $P_n = n!$

Demostración.

$$P_n = V(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Ejemplo.

¿De cuántas maneras se puede ordenar 6 libros en un estante?

Solución.

De $P_6 = 6! = 720$ formas distintas

Si de estos libros, 3 de ellos forman una colección y por lo tanto van juntos, el número total de distribuirlos es ahora $P_4 = 4! = 24$ maneras

4.4.5 COMBINACIONES

Sea A un conjunto que tiene n elementos, llamamos combinación de orden k, $k \le n$**, a todo subconjunto de A formado por k elementos**

Observación.

Dos combinaciones de orden k son diferentes sólo si tienen al menos un elemento diferente, dado que el orden de los elementos no interesa.

Al número total de combinaciones de orden k lo denotamos $C(n,k)$ o también por $\binom{n}{k}$

Proposición.

$$C(n,k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Demostración.

Como cada variación de orden k genera $k!$ variaciones de orden k entonces

$k!C(n,k)=V(n,k)$, de donde: $C(n,k)=\frac{V(n,k)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Ejemplo.

1) Si una prueba contiene 7 preguntas y el alumno debe responder sólo 4 de ellas ¿Cuántas posibles tipos de pruebas espera como respuesta el corrector?
   Solución.
   Como el orden de las respuestas no interesa, el número pedido es

   $$C(7,4)=\binom{7}{4}=35$$

2) En un grupo de 15 muchachos y 10 niñas ¿De cuántas maneras puede formarse un grupo compuesto por 3 muchachos y 2 niñas?
   Solución.

   Como al formar el grupo no interesa el orden entonces, los 3 muchachos pueden seleccionarse entre los 15 disponibles de $C(15,3)$ formas, por otro lado las 2 niñas pueden seleccionarse de entre las 10 niñas de $C(10,2)$.

Usando el Principio Multiplicativo concluimos que, el grupo puede formarse de $C(15,3)\cdot C(10,2)=20.475$

Observación.

Se cumple:

a) $\binom{n}{n}=1,\ \forall\, n\in N\cup\{0\}$

b) $\binom{n}{0} = 1, \forall\, n \in N \cup \{0\}$

c) $\binom{n}{n-1} = n, \forall\, n \in N$

d) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \forall\, n, k \in N \cup \{0\}, k < n$

e) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \forall\, n, k \in N \cup \{0\}, k < n$

Demostración

e) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$

$$= \frac{(k+1)\, n! + (n-k)\, n!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\left[k+1+n-k\right]}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{(\mathrm{n}+1)\, n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Ejemplo

Compruebe que $\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+2}{k+2} = \binom{n+3}{k+2}$

Solución

Usando la última afirmación tenemos:

$$\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+2}{k+2} = \binom{n+2}{k+1} + \binom{n+2}{k+2} = \binom{n+3}{k+2}$$

4.4.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Existen 3 caminos para ir de las ciudad X a la ciudad Y, y 2 caminos para ir de la ciudad Y a la ciudad Z. ¿Cuántas rutas distintas puede realizar una persona para ir desde X a Z? Resp. 6 rutas

2) ¿Cuántos números de 4 dígitos pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4? Resp. 24

3) ¿Cuántos de tales números son menores que 3.000? Resp. 12

4) ¿Cuántas señales puede mostrar un barco que dispone de 7 banderas, si cada señal consiste de 5 banderas colocadas verticalmente en un asta? Resp.2.500 señales

5) ¿De cuántas maneras pueden ubicarse 9 estudiantes en 3 habitaciones donde cupen 3 estudiantes en cada una? Resp. 1.680

6) ¿Cuántas palabras que contengan 3 consonantes y 2 vocales se pueden formar con 6 consonantes y 4 vocales? Resp. 1.440

7) En una reunión hay 16 estudiantes y 4 profesores

   a) ¿Cuántas comisiones de 5 personas cada una pueden formarse si en cada una de ellas deben participar 2 profesores?
   b) ¿Cuántas comisiones de 5 personas cada una pueden formarse si en cada una de ellas participan a lo más 2 profesores?
   Resp a) 3.360

8) De un naipe de 52 cartas se extrae, al azar, 3 de ellas; determine:
   a) El numero de grupos que se puede formar
   b) El número de maneras de extraer un as
   c) El número de maneras de extraer al menos un as
   Resp, $a)\binom{52}{3}$, $b)\binom{4}{1}\binom{48}{2}$

9) Si 4 personas entran a un cine en el cual hay 7 lugares vacíos ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar? Resp. 840

10) Simplifique:

   a) $\dfrac{(n+1)!+n!}{(n+1)!-n!}$ b) $\dfrac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n}{k-1}}$

11) Resuelva las siguientes ecuaciones

a) $\binom{2x}{x-1} \div \binom{2x-2}{x} = \frac{132}{35}$ Resp. $x = 6$

b) $\dfrac{\binom{x}{4} - \binom{x}{3}}{\binom{x}{4} + \binom{x}{3}} = \dfrac{3}{4}$ Resp. $x = 31$

c) $\dfrac{(2x)!}{(x-1)!(x+1)!} \cdot \dfrac{x!(x-2)!}{(2x-2)!} = \dfrac{132}{35}$ Resp. $x = 6$

12) Verifique que: $2n! - (n-1)!(n-1) = n! + (n-1)!$

13) Verifique si se cumple:

$$\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2} = \binom{n+2}{k}$$

14) Verifique que: $\binom{n+2}{k+3} + 3\binom{n+2}{k+2} + 3\binom{n+2}{k+1} + \binom{n+2}{k} = \binom{n+5}{k+3}$

4.5 TEOREMA DEL BINOMIO

4.5.1 Teorema y propiedades

Teorema.

Sean $a, b \in \Re$, $n \in N$ **, entonces:** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Demostración.

Sea $P(n): (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

a) $P(1)$ es verdadero ya que $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k$, esto último dado que

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = a + b$$

b) Si $P(r)$ es verdadero, es decir, si $(a+b)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} a^{r-k} b^k$ debemos demostrar que

$(a+b)^{r+1} = \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{k} a^{r+1-k} b^k$. Veámoslo

$$(a+b)^{r+1}$$

$$= (a+b)^r (a+b)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} a^{r-k} b^k\right)(a+b)$$

$$= \left[\binom{r}{0} a^r + \binom{r}{1} a^{r-1} b + \dots + \binom{r}{k-1} a^{r-(k-1)} b^{k-1} + \dots + \binom{r}{r} b^r\right](a+b)$$

$$= \binom{r}{0} a^{r+1} + \binom{r}{1} a^r b + \binom{r}{2} .a^{r-1} b^2 + \dots + \binom{r}{k-1} a^{r-k+2} b^{k-1} + \dots + \binom{r}{r} a b^r$$

$$+ \binom{r}{0} a^r b + \binom{r}{1} a^{r-1} b^2 + \dots\dots\dots\dots + \binom{r}{k-1} a^{r-k+1} b^k + \dots + \binom{r}{r} b^{r+1}$$

$$=\binom{r}{0}a^{r+1}+\left[\binom{r}{1}+\binom{r}{0}\right]a^{r}b+\left[\binom{r}{2}+\binom{r}{1}\right]a^{r-1}b^{2}+..+\left[\binom{r}{r}+\binom{r}{r-11}\right]ab^{r}+\binom{r}{r}b^{r+1}$$

$$=\binom{r+1}{0}a^{r+1}+\binom{r+1}{1}a^{r}b+\binom{r+1}{2}a^{r-1}b^{2}+..+\binom{r+1}{r}ab^{r}+\binom{r+1}{r+1}b^{r+1}$$

$$=(a+b)^{r+1}$$

Observación.

1) Desarrollando la sumatoria obtenemos:

$$(a+b)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}$$

$$=\binom{n}{0}a^{n}+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^{2}+...+\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}+...$$

$$+\binom{n}{n-1}a^{n-(n-1)}b^{n-1}+\binom{n}{n}b^{n}$$; es decir, en el desarrollo de

$(a+b)^{n}$ obtenemos $(n+1)$ términos.

2) El término de lugar k, denotado t_k, es: $t_k=\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$, o quizás más fácil, el $(k+1)$-ésimo término es $t_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}$.

Ejemplos.

1) Desarrolle: $(2a+b)^{4}$

Solución.

$(2a+b)^{4}$

$$=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(2a)^{4-k}b^{k}=\binom{4}{0}(2a)^{4}+\binom{4}{1}(2a)^{3}b+\binom{4}{2}(2a)^{2}b^{2}+\binom{4}{3}(2a)b^{3}+\binom{4}{4}b^{4}$$

$$= 1\cdot 16a^4 + 4\cdot 8a^3\cdot b + 6\cdot 4a^2\cdot b^2 + 4\cdot 2a\cdot b^3 + 1\cdot b^4 = 16a^4 + 32a^3b + 24a^2b^2 + 8ab^3 + b^4$$

Observe que el coeficiente de ab^3 es 8

2) En $(1-\frac{x^2}{2})^{14}$ determine:

   a) el quinto término
   b) el(los) término(s) central(es)

Solución.

a) $t_5 = \binom{14}{4}1^{10}(-\frac{x^2}{2})^4 = 1.001\cdot\frac{x^8}{16} = \frac{1.001}{16}x^8$

b) Si el exponente del binomio es un número par, entonces existe un único término central, así, si n es par, entonces el término central es : $t_{\frac{n}{2}+1}$; el término pedido es : $t_8 = \binom{14}{7}1^7\left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\binom{14}{7}\frac{1}{2^7}x^{14}$

3) Determine el coeficiente de x^{18} (si existe), en el desarrollo de $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^{15}$

Solución:

Supongamos que $x^{18}\in t_{t+1} = \binom{15}{k}\left(x^2\right)^{15-k}\left(\frac{3}{x}\right)^k$, entonces

$x^{18}\in\binom{15}{k}x^{30-2k}3^k x^{-k} = \binom{15}{k}3^k x^{30-3k}$. Esto nos indica que $x^{18} = x^{30-3k}$, de donde

30 – 3k = 18, así, k = 4. Deducimos que el coeficiente de x^{18} es $\binom{15}{4}3^4$

4) Determine el coeficiente de x^{10} (si existe), en $(1+2x+3x^2)(1+x)^{12}$

Solución.

$$(1+2x+3x^2)(1+x)^{12} = (1+x)^{12} + 2x(1+x)^{12} + 3x^2(1+x)^{12}$$

Como $\left(1+x\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}1^{12-k}x^{k} = \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}x^{k}$,concluimos que:
el coeficiente de x^{10} es $\binom{12}{10}$; el coeficiente de x^{9} es $\binom{12}{9}$ y que el coeficiente de

x^{8} es $\binom{12}{8}$,así, el coeficiente de x^{10} en el desarrollo de $(1+2x+3x^{2})(1+x)^{12}$ es

$$\binom{12}{10}+2\binom{12}{9}+3\binom{12}{8}$$

5)) Determine el coeficiente de x^{6} en $(2+x+x^{2})^{10}$
Solución
En primer lugar escribimos la potencia del trinomio como $\left[(2+x)+x^{2}\right]^{10}$ y además tenemos que $(2+x)^{n} = \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}2^{n-p}x^{p}$, entonces:
Sea $x^{6} \in t_{k+1}$ entonces $x^{6} \in \binom{10}{k}(2+x)^{10-k}(x^{2})^{k}$, así,
$x^{6} \in \binom{10}{k}\left[\sum_{p=1}^{10-k}\binom{10-k}{p}2^{10-k-p}x^{p}\right](x^{2})^{k}$, es decir, $x^{6} \in \sum_{p=1}^{10-k}\binom{10}{k}\binom{10-k}{p}2^{10-k-p}x^{p+2k}$

Como se debe cumplir que $p+2k=6$ entonces las posibilidades son:
$(p=0 \wedge k=3)$, $(p=2 \wedge k=2)$, $(p=4 \wedge k=1)$, de donde, el coeficiente de x^{6} es
$$\binom{10}{3}\binom{7}{0}+\binom{10}{2}\binom{8}{2}+\binom{10}{1}\binom{9}{4}$$

4.5.2 EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Determine el sexto término en el desarrollo de $(\frac{1}{2}a-3)^{6}$

2) Determine el sexto término en el desarrollo de $\left(\frac{x^{2}}{2}-\frac{x}{3}\right)^{8}$

3) Determine el coeficiente de x^{18} (si existe) en el desarrollo de $\left(x^{2}+\frac{3}{x}\right)^{15}$

4) Calcule el coeficiente numérico del término central de $\left(3s - \frac{1}{9}t\right)^8$

5) ¿Es cierto que el coeficiente de x^{16} en $\left(x^2 + 2x\right)^{10}$ es 3.360?

6) Determine el coeficiente de x en $\left(9x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{13}$

7) Determine el coeficiente de x^4 en $(1+x)(1-x)^n$

8) Determine el coeficiente de x^n en $\left(1 - x + x^2\right)(1+x)^n$

9) Determine el coeficiente de x^5 en $\left(1 + x + x^2\right)^{10}$

10) Demuestre que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

11) En $(3x+2)^{19}$ ¿existen dos términos consecutivos con coeficientes iguales?

12) Determine el coeficiente de x^5 en $\left(x^2 + x + 3\right)^7$

13) ¿Existe $n \in N$ para que el cuarto término de $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{3n}$ y $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{3n}$ sean iguales?

14) En $\left(x + \frac{1}{2}\right)^{2n+1}$ determine
   a) el (los) termino (s) central (es)
   b) Coeficiente de x^0

15) En $\left(\frac{a^4}{b} + \frac{b^2}{a^7}\right)^{14}$ determine (si existen)
   a) el séptimo término
   b) el coeficiente de ab

16) Determine $\frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$. ¿Qué pasa si h es muy pequeño?

17) En el desarrollo de $(3x+2)^{19}$ ¿Existirán dos términos consecutivos con coeficientes iguales?

18) Pruebe que los coeficientes de x^2 y x^3 en el desarrollo de $(x^2+2x+2)^n$ son, respectivamente $2^{n-1}n^2$ y $\frac{1}{3}n(n^2-1)2^{n-1}$

19) Considere $p,q \in \Re^+$ tal que $p+q=1$ y $P(k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, $k=0,1,..,n$

Demuestre:

a) $\sum_{k=0}^{n} kP(k)=np$

b) $\sum_{k=0}^{n}(k-np)^2 P(k)=npq$

4.6 EJERCICIOS DIVERSOS COMPLEMENTARIOS - NATURALES

1) Calcule $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k\,!$

Solución.

$\sum_{k=1}^{n} k\cdot k\,! = \sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)-1\right]\cdot k\,! = \sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)\cdot k\,! - k\cdot k\,!\right] = \sum_{K=1}^{n}\left[(k+1)\,! - k\,!\right]$; notamos que estamos en condición de aplicar la propiedad telescópica de las sumatorias, obtenemos: $(n+1)\,!-1\,!$, así, $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k\,! = (n+1)\,!-1$

2) Demuestre que $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k\,! = (n+1)\,!-1$ se cumple en todo N

Demostración.

Sea $P(n): \sum_{k=1}^{n} k\cdot k\,! = (n+1)\,!-1$

Debemos demostrar: a) $P(1)$ es V b) Si $P(r)$ es V entonces $P(r+1)$ es V

a) $P(1)$ es verdadero ya que $\sum_{k=1}^{1} k\cdot k\,! = 1\cdot 1! = 1 = (1+1)\,!-1 = 2\,!-1$

b) Si $P(r)$ es verdadero, es decir, si $\sum_{k=1}^{r} k\cdot k\,! = (r+1)\,!-1$, debemos demostrar que $\sum_{k=1}^{r+1} k\cdot k\,! = (r+2)\,!-1$. Veámoslo:

$$\sum_{k=1}^{r+1} k \cdot k\,! = (r+2)\,!-1 = \sum_{k=1}^{r} k \cdot k\,! + \sum_{k=r+1}^{r+1} k \cdot k\,!$$
$$= (r+1)\,!-1+(r+1)\cdot(r+1)\,!$$
$$= (r+1)\,!(1+\mathrm{r}+1)\text{ -1}$$
$$= (r+2)\,!-1$$

3) Calcule $\ln \prod_{k=1}^{n} e^k$

Solución

$$\ln \prod_{k=1}^{n} e^k = \ln(e \cdot e^2 .e^3 \cdot ...... \cdot e^n)$$
$$= \ln e + \ln e^2 + \ln e^3 + ... + \ln e^n = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

4) Demuestre que $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ es divisible por 14 para todo natural n

Demostración

Sea $P(n): 3^{4n+2} + 5^{2n+1} = 14r$ para algún $r \in Z$

a) $P(1)$ es verdadero ya que $3^{4\cdot 1+2} + 5^{2\cdot 1+1} = 3^6 + 5^3 = 729 + 125 = 854 = 14 \cdot 61$

b) Si $P(k)$ es verdadero, es decir, si $3^{4k+2} + 5^{2k+1} = 14r$, para algún $r \in Z$, debemos demostrar que $3^{4(k+1)+2} + 5^{2(k+1)+1} = 14s$, para algún $s \in Z$
Veámoslo.

$$3^{4(k+1)+2} + 5^{2(k+1)+1} = 3^{4k+4+2} + 5^{2k+2+1} = 3^4 \cdot 3^{4k+2} + 5^2 \cdot 5^{2k+1}$$

$$= 3^4 \cdot 3^{4k+2} + 3^4 \cdot 5^{2k+1} - 3^4 \cdot 5^{2k+1} + 5^2 \cdot 5^{2k+1}$$

$$= 3^4 (3^{4k+2} + 5^{2k+1}) - 56 \cdot 5^{2k+1}$$

$$= 3^4 \cdot 14r - 14 \cdot 4 \cdot 5^{2k+1} = 14(3^4 r - 4 \cdot 5^{2k+1}) = 14s$$

donde $s = 81r - 4 \cdot 5^{2k+1} \in Z$

5) Calcule

$$\frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) + (\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}) + ... + (\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + ... + \frac{99}{100})$$

Solución.

Denotemos por S a la suma propuesta, entonces, en realidad es cuestión de escribir la suma propuesta con los símbolos ya estudiados; tenemos:

$$S=\sum_{k=2}^{100}\frac{\sum_{i=1}^{k-1} i}{k}=\sum_{k=2}^{100}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i}{k}=\sum_{k=2}^{100}\frac{(k-1)k}{2k}=\sum_{k=2}^{100}\frac{k-1}{2}=\sum_{k=1}^{99}\frac{k}{2}=\frac{99\cdot 98}{4}=2.475$$

6) Calcule $\sum_{k=1}^{20}\frac{2^k-1}{4^{k-1}}$

Solución.

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{2^k-1}{4^{k-1}}=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{2^k}{4^{k-1}}-\frac{1}{4^{k-1}}\right)=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{2^k}{2^{2k-2}}-\frac{1}{4^{k-1}}\right)=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{2^{k-2}}-\frac{1}{4^{k-1}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{20}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}-\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right)=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}-\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

La primera sumatoria corresponde a la suma de los primeros 20 términos de una Progresión Geométrica con primer término con valor $(\frac{1}{2})^{-1}$ y razón $\frac{1}{2}$ en tanto que la segunda sumatoria corresponde a la suma de los primeros 20 términos de una Progresión geométrica con primer término con valor 1 y razón $\frac{1}{4}$. Usted puede calcular estas sumas con aplicación de la fórmula

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

4.7 EJERCICIOS PROPUESTOS COMPLEMENTARIOS - NATURALES

1) Calcule $\log\prod_{k=1}^{n}\frac{10^k}{100k}-\sum_{k=1}^{n}\log k$ Resp. $\frac{n(n+1)}{2}-2n-2\log n!$

2) Calcule $\sum_{k=1}^{100}\frac{3^k-1}{9^{k-1}}$ Indicación. Separe y llega a dos P.G.

3) Demuestre que $\sum_{p=1}^{n}(p^2+1)p!=n(n+1)!$ se cumple para todo natural

4) Calcule $\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$ Indicación. Sume y reste alguna expresión adecuada para usar la propiedad telescópica . Resp. $\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}-\sqrt{2}-1$

5) Calcule $\sum_{k=5}^{100}\left[\sqrt{k+2}-\left(\frac{3}{4}\right)^k-\sqrt{k+1}\right]$

6) Calcule $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)\,!}$ Resp. $1-\frac{1}{(n+1)\,!}$

7) Muestre que la suma de los n primeros naturales más n^2 es igual a la suma de los siguientes n naturales. Resp. La suma común es $\frac{n(3n+1)}{2}$

8) Determine $x\in\Re$ para que $x\,,\,x-6\,,\,x-8$ estén en Progresión Armónica
Resp. $x=12$

9) Demuestre que $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})\cdot ....\cdot(1-\frac{1}{n^2})=\frac{n+1}{2n}\quad \forall \text{n}\in \text{N}, \text{n}\geq 2$

10) Si $a_k=\begin{cases} k^2+2k+1 & 1\leq k\leq 25 \\ \frac{2^{k-1}}{3^{2k+1}} & 26\leq \text{k}\leq 35 \\ \frac{1}{(2\text{k}+5)(2\text{k}+7)} & 36\leq k\leq 50\end{cases}$, determine $\sum_{k=1}^{50}a_k$

11) Demuestre que $\sum_{i=1}^{n}\binom{i+1}{2}=\binom{n+2}{3}$ se cumple para todo valor del natural n

CAPITULO 5

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

5.1 Ley de composición interna

Definición.

Sea E un conjunto, $*$ se llama "ley de composición interna en E" si y sólo si: $a*b=c\in E$, $\forall a,b\in E$

Observación.

1) $*$ también se llama "operación binaria interna en E
2) Podemos decir que el conjunto E está cerrado para $*$
3) $*$ es ley de composición interna en E si y sólo si $*: E\times E\to E$ es función

Ejemplos.

1) La adición es ley de composición interna en N,Z,Q,R
2) $*$ definida en Z por $a*b=a-b+ab$ es ley de composición interna en Z
3) Si A es un conjunto y $P(A)=\{X \,/\, X\subseteq A\}$ entonces, la operación $\cup$ definida en $P(A)$ es ley de composición interna en $P(A)$

Proposición.

Sea $*$ ley de composición interna en E y $a,b\in E$, entonces:

a) $a=b\Rightarrow a*c=b*c \quad \forall c\in E$
b) $a=b\Rightarrow c*a=c*b \quad \forall c\in E$

Demostración.

a) $a=b\Rightarrow (a,c)=(b,c)\Rightarrow *(a,b)=*(b,c)$ es decir $a*c=b*c$
b) Análogo

5.1.1 Asociatividad

Definición.

Sea $*$ ley de composición interna en E, decimos que $*$ es asociativa si y sólo si $a*(b*c)=(a*b)*c \;\; \forall a,b,c\in E$

Ejemplos.

1) La adición en Z es asociativa
2) La multiplicación es asociativa en $N,Z,Q,\Re$
3) $*$ definida en $\Re$ por: $a*b=a+b+2ab$ es asociativa ya que:

$$\begin{aligned} a*(b*c) &= a*(b+c+2bc) \\ &= a+(b+c+2bc)+2a(b+c+2bc) \\ &= a+b+c+2bc+2ab+2ac+4abc \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} (a*b)*c &= (a+b+2ab)*c \\ &= (a+b+2ab)+c+2(a+b+2ab)c \\ &= a+b+2ab+c+2ac+2bc+4abc \end{aligned}$$

Como $a*(b*c)=(a*b)*c$ entonces $*$ es asociativa

4) $*$ definida en $\Re$ por: $a*b = a+2b$ no es asociativa ya que, por ejemplo,
$2*(5*3) = 2*(5+2\cdot 3) = 2*(5+6) = 2*11 = 2+2\cdot 11 = 24$ no es igual a
$(2*5)*3 = (2+2\cdot 5)*3 = (2+10)*3 = 12*3 = 12+2\cdot 3 = 18$

5) Si A es un conjunto y $P(A) = \{X \,/\, X \subseteq A\}$ entonces la operación $\cup$, $\cap$ definida en $P(A)$ es asociativa

5.1.2 Distributividad

Definición.

Sean $*, \nabla$ dos leyes de composición interna en el conjunto E,

a) Se dice que $*$ distribuye por la izquierda sobre ∇ si y sólo si
$a*(b\nabla c) = (a*b)\nabla(a*c)\ \ \forall a,b,c \in G$

b) Se dice que $*$ distribuye por la derecha sobre ∇ si y sólo si
$(b\nabla c)*a = (b*a)\nabla(c*a)\ \ \forall a,b,c \in G$

c) Se dice que $*$ es distributiva sobre ∇ si y sólo si cumple a) y b)

Ejemplos.

1) La multiplicación es distributiva con respecto de la adición en $\Re$ ya que
$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c\ \ \forall a,b,c \in \Re$ y $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c\ \ \forall a,b,c \in \Re$

2) La adición no es distributiva con respecto de la multiplicación en $\Re$ ya que, por ejemplo, $2+(5\cdot 4) \neq (2+5)\cdot(2+4)$

3) Sean $* : \Re^+ \times \Re^+ \to \Re^+$ tal que $a*b = b^a$ y $\nabla : \Re^+ \times \Re^+ \to \Re^+$ tal que $a\nabla b = a\cdot b$ dos leyes de composición interna.

a) Pruebe que $*$ es distributiva por la izquierda con respecto de ∇

b) Pruebe que $*$ no es distributiva por la derecha con respecto de ∇

Demostración.

a) Debemos demostrar que $a*(b\nabla c) = (a*b)\nabla(a*c)\ \ \forall a,b,c \in \Re^+$

$$a*(b\nabla c) = a*(b\cdot c) = (b\cdot c)^a = b^a\cdot c^a = (a*b)\nabla(a*c)$$

b) Como $(a\nabla b)*c = (a\cdot b)*c = c^{a\cdot b}$ y $(a*c)\nabla(b*c) = c^a\nabla c^b = c^{a+b}$ y dado que $c^{a\cdot b} \neq c^{a+b}$ concluimos que $*$ no es distributiva por la derecha con respecto de ∇

5.1.3 Elemento neutro

Definición.

Sea $*$ ley de composición interna en E, $e \in E$ se llama elemento neutro para $*$ si y sólo si $e*a = a*e = a\ \ \forall a \in E$

Ejemplos.

1) $0 \in \Re$ es neutro para la adición en los números reales

2) $1 \in \Re$ es neutro para la multiplicación en los números reales

3) $\cap : P(X)\times P(X) \to P(X)$ donde X es un conjunto y $P(X)$ es el conjunto potencia de X tiene neutro $e = X$ ya que $A \cap X = X \cap A = A\ \ \forall A \in P(X)$

Proposición.

Sea $*$ ley de composición interna en E entonces, si existe elemento neutro, éste es único

Demostración.

Sean e, e_1 dos neutros para $*$, debemos demostrar que $e = e_1$; tenemos:

$e * e_1 = e_1$ ya que e es neutro, por otro lado $e * e_1 = e$ ya que e_1 es neutro, así, $e = e_1$

5.1.4 Conmutatividad

Definición.

Sea $*$ ley de composición interna en E, $*$ es conmutativa en E si sólo si $a * b = b * a \ \ \forall a, b \in E$

Ejemplos.

1) La adición y la multiplicación son operaciones conmutativas en Z, Q, R
2) La unión y la intersección de conjuntos son operaciones conmutativas en el conjunto potencia del conjunto A
3) La operación $*$ definida en R tal que $a * b = a + 2b$ no es conmutativa, ya que, por ejemplo, $3 * 2 = 7 \neq 2 * 3 = 8$

5.1.5 Elemento inverso

Definición.

Sea $*$ ley de composición interna en E tal que existe elemento neutro $e \in E$ con respecto de $*$; se llama elemento inverso de $a \in E$ con respecto de $*$ al elemento $\overline{a} \in E$ tal que $a * \overline{a} = \overline{a} * a = e \ \ \forall a \in E$

Ejemplo.

Considere la operación $*$ definida en $\Re$ por $a * b = a + b + 2ab$ tal que es asociativa y con neutro $e = 0$. ¿Qué elementos $a \in \Re$ tienen inverso $\overline{a}$?

Solución.

Imponiendo la condición de inverso, se debe cumplir que $a * \overline{a} = e$, así:

$a * \overline{a} = e \Rightarrow a + \overline{a} + 2a\overline{a} = 0 \Rightarrow \overline{a}(1 + 2a) = -a \Rightarrow \overline{a} = \dfrac{-a}{2a+1}$ donde $a \neq -\dfrac{1}{2}$, por otro lado $\overline{a} * a = \dfrac{-a}{2a+1} * a = \dfrac{-a}{2a+1} + a + 2a\dfrac{-a}{2a+1} = a + \dfrac{-a - 2a\overline{a}}{2a+1} = 0$ de donde:

$\forall a \in \Re - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ existe $\overline{a} \in \Re$ tal que $\overline{a} = \dfrac{-a}{2a+1}$

Proposición.

Sea $*$ ley de composición interna en E tal que $*$ es asociativa y con elemento neutro e entonces, si $a \in E$ tiene inverso, este es único.

Demostración.

Sean $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ dos inversos de x entonces se cumple: $\overline{x_1} * x = x * \overline{x_1} = e$ y además $\overline{x_2} * x = x * \overline{x_2} = e \ \ \forall x \in E$; debemos demostrar que $\overline{x_1} = \overline{x_2}$, veámoslo:

$$\overline{x_1} = \overline{x_1} * e = \overline{x_1} * (x * \overline{x_2}) = (\overline{x_1} * x) * \overline{x_2} = e * \overline{x_2} = \overline{x_2}$$

Proposición.

Sea $*$ ley de composición interna en E tal que $*$ es asociativa y con elemento neutro e tal que $a, b \in E$ tienen elemento inverso $\overline{a}$, $\overline{b}$, entonces:

a) $\overline{(\overline{a})} = a$

b) $\overline{(a * b)} = \overline{b} * \overline{a}$

Demostración.

b) Si demostramos que $c = \overline{b} * \overline{a}$ es tal que $(a * b) * c = e$ y $c * (a * b) = e$, habremos demostrado que c es inverso de $a * b$; veámoslo:

$(a * b) * c = (a * b) * (\overline{b} * \overline{a}) = a * \left[b * (\overline{b} * \overline{a})\right] = a * \left[(b * \overline{b}) * \overline{a})\right] = a * \left[e * \overline{a}\right] = a * \overline{a} = e$

Análogamente, $c * (a * b) = e$, así, el inverso de $a * b$ es $\overline{b} * \overline{a}$ de donde se cumple $\overline{(a * b)} = \overline{b} * \overline{a}$

Ejemplo.

Considere la operación $*$ definida en $\Re$ por $a * b = a + b + 2ab$ tal que es asociativa, con neutro $e = 0$ y $\overline{a} = \dfrac{-a}{2a+1}$ con $a \neq -\dfrac{1}{2}$

a) Resuelva la ecuación $\overline{(2 * \overline{x})} = 3$

b) Resuelva la inecuación $\overline{(-2 * \overline{x})} \leq 2$

Solución.

Conviene aplicar la propiedad $\overline{(a * b)} = \overline{b} * \overline{a}$, tenemos:

a) $\overline{(2 * \overline{x})} = 3 \Rightarrow x * \overline{2} = 3 \Rightarrow x * \dfrac{-2}{2 \cdot 2 + 1} = 3 \Rightarrow x * -\dfrac{2}{5} = 3$

$$\Rightarrow x - \frac{2}{5} + 2(-\frac{2}{5})x = 3 \Rightarrow \frac{-1}{5}x = \frac{17}{5} \text{ de donde } x = -17$$

b) $\overline{(-2 * \overline{x})} \leq 2 \Rightarrow x * \overline{-2} \leq 2 \Rightarrow x * \dfrac{-(-2)}{2(-2)+1} \leq 2 \Rightarrow x * -\dfrac{2}{3} \leq 2$

$$\Rightarrow x - \frac{2}{3} + 2(-\frac{2}{3})x \leq 2 \Rightarrow -\frac{1}{3}x \leq \frac{8}{3} \Rightarrow x \geq -8$$

La solución es $\left[-8, \infty\right[- \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

5.2 ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS.

Cuando dotamos a un conjunto de una o más leyes de composición es que estamos dando a dicho conjunto cierta *estructura*. Una estructura, por consiguiente, queda definida por los axiomas que rigen las relaciones y las operaciones de las que está dotada. En lo que sigue estudiaremos las estructuras fundamentales del álgebra: grupos, anillos, cuerpos y espacios vectoriales.

5.2.1 Grupo

Definición.

Un *grupo* es un par $(G,*)$ donde:

1) G es un conjunto
2) $*$ es ley de composición interna en G tal que:
   a) $a*(b*c)=(a*b)*c \ \ \forall a,b,c\in G$
   b) Existe $e\in G$ tal que $a*e=e*a=a \ \ \forall a\in G$
   c) Si $a\in G$ entonces existe $\overline{a}\in G$ tal que $a*\overline{a}=\overline{a}*a=e$

Observación

Decimos que el grupo $(G,*)$ es conmutativo si la operación $*$ es conmutativa

Ejemplos.

1) $(Z,+)$ es grupo conmutativo
2) $(\Re-\{0\},\cdot)$ es un grupo conmutativo
3) $(Q^{+},*)$ tal que $a*b=\dfrac{ab}{2}$ es grupo conmutativo

Proposición.

Sea $(G,*)$ un grupo entonces : $a*c=b*c \Leftrightarrow a=b$, $a,b,c\in G$

Demostración.

$\Rightarrow)$ Si $a*c=b*c$ debemos demostrar que $a=b$

$$\begin{aligned} a*c=b*c &\Rightarrow (a*c)*\overline{c}=(b*c)*\overline{c}\\ &\Rightarrow a*(c*\overline{c})=b*(c*\overline{c})\\ &\Rightarrow a*e=b*e\Rightarrow a=b \end{aligned}$$

$\Leftarrow)$ Propuesto

Proposición.

Sea $(G,*)$ un grupo, $a,b\in G$ entonces, la ecuación $a*x=b$ tiene solución única en G

Demostración.

$$\begin{aligned} a*x=b &\Rightarrow \overline{a}*(a*x)=\overline{a}*b\\ &\Rightarrow (\overline{a}*a)*x=\overline{a}*b\\ &\Rightarrow e*x=\overline{a}*b\Rightarrow x=\overline{a}*b \end{aligned}$$

Es claro que $\overline{a}*b$ es solución y única

Ejemplos.

1) $(C,+)$ donde $C=\{(a,b)/a,b\in\Re\}$ es el conjunto de los números complejos y la adición esta definida por $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) \ \ \forall (a,b),(c,d)\in C$, es un grupo conmutativo

2) $(M(2,\Re),+)$ donde $M(2,\Re)=\left\{\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}/a,b,c,d\in\Re\right\}$ es el conjunto de las matrices cuadradas de tamaño 2 en $\Re$ y la suma se define por:

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{pmatrix}$ es un grupo conmutativo

3) Demuestre que dos funciones en $Q - \{0\}$; $f(x) = x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ tienen estructura de grupo bajo la composición de funciones

Demostración.

Como: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} = g(x)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) = \frac{1}{x} = g(x)$

$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\frac{1}{x}) = x = f(x)$

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x = f(x)$, entonces la composición es ley de composición interna en $A = \{f(x), g(x)\}$

Estos resultados podemos escribirlos es la siguiente tabla de doble entrada

$\circ$	$f(x)$	$g(x)$
$f(x)$	$f(x)$	$g(x)$
$g(x)$	$g(x)$	$f(x)$

Es inmediato que:

El elemento neutro es $e = f(x)$

El elemento inverso de $f(x)$ es $f(x)$; el elemento inverso de $g(x)$ es $g(x)$

La asociatividad la puede probar Ud.

Así, $(A, \circ)$ es grupo; además es grupo conmutativo.

4) Sea $(Z,*)$ tal que $a * b = a + b - 2$, $a, b \in Z$. Demuestre que $(Z,*)$ es grupo

Demostración.

Claramente $*$ es ley de composición interna en Z

Debemos demostrar que $*$ es asociativa, posee neutro e inverso en Z

i) $a*(b*c) = a*(b+c-2)$

$= a + (b+c-2) - 2$

$= a+b+c-4$

$(a*b)*c = (a+b-2)*c$

$= (a+b-2)+c-2$

$= a+b+c-4$

así, $a*(b*c) = (a*b)*c \ \forall a,b,c \in Z$

ii) Debemos probar que existe neutro e tal que $a*e = e*a = a \ \forall a \in Z$

Imponiendo la condición $a*e = a$ tenemos:

$a*e = a \Rightarrow a+e-2 = a \Rightarrow e = 2$

Ahora debemos verificar que el neutro opera por la derecha, tenemos:

$e*a = 2*a = 2+a-2 = a$; así. El neutro es $e = 2$

iii) Debemos demostrar que, para todo $a \in Z$ existe $\overline{a} \in Z$ tal que $\overline{a} * a = a * \overline{a} = 2$

Imponiendo la condición $\overline{a} * a = 2$ tenemos:

$\overline{a} * a = 2 \Rightarrow \overline{a} + a - 2 = 2 \Rightarrow \overline{a} = 4 - a$

Por otro lado, como $a * \overline{a} = a * (4 - a) = a + (4 - a) - 2 = 2$ entonces $\overline{a} = 4 - a$

Concluimos: $(Z, *)$ es grupo

5) Sea $A = \{ a, b \}$ y $(A, *)$ un grupo. Demuestre que el grupo es conmutativo

Demostración.

Debemos demostrar que $a * b = b * a$

Como $(A, *)$ es grupo entonces debe poseer neutro e; supongamos que $e = b$ entonces $a * b = a * e = a = e * a = b * a$

6) Sea $*$ una ley de composición interna definida en $Q \times Q$ tal que $(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$. Se sabe que $(A, *)$ es grupo donde $A = \{(1, x) / x \in Q\}$; determine el neutro e en A.

Solución.

Sea $e = (1, p) \in A$ tal elemento neutro; imponiendo la condición de neutro debe cumplir: $(1, x) * (1, p) = (1, p) * (1, x) = (1, x) \ \ \forall (1, x) \in A \times A$

De $(1, x) * (1, p) = (1, x)$ tenemos $(1, x + p) = (1, x)$, de aquí concluimos $x + p = x$, de donde $p = 0$, así, el neutro lateral derecho es $e = (1,0)$

Ahora debemos verificar que es neutro lateral izquierdo, tenemos:

$e * (1, x) = (1,0) * (1, x) = (1,0 + x) = (1, x) \ \ \forall (1, \mathrm{x}) \in \mathrm{A}$, luego, $e = (1,0)$

7) Sea $\{x, y\} \subseteq Z_3$. Pruebe que $(x + y)^3 = x^3 + y^3$

Solución.

$$
\begin{aligned}
(x + y)^3 &= (x + y)(x + y)(x + y) \\
&= x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + x^3 \\
&= x^3 + y^3, \text{ ya que } 3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)
\end{aligned}
$$

5.2.2 Anillo

Definición.

El trío $(A, +, \cdot)$ se llama anillo si y sólo si:

a) $(A, +)$ es grupo conmutativo
b) $\cdot$ es ley de composición interna en A
c) $\cdot$ es asociativa
d) $\cdot$ es distributiva con respecto de +

Definición.

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo, entonces:

a) $(A, +, \cdot)$ es conmutativo si y sólo si $\cdot$ es conmutativa
b) $(A, +, \cdot)$ es un Anillo con unidad si y sólo si existe elemento neutro para $\cdot$

Ejemplos.

1) $(Z,+,\cdot)$ es anillo
2) $(E,+,\cdot)$ es anillo, donde $E = \{x \in Z \,/\, x \text{ es un número par}\}$
3) $(Z,+,\otimes)$ donde $a \otimes b = 2ab$ es anillo
4) $(\Re \times \Re,+,\cdot)$ tal que $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ y $(a,b)\cdot(c,d)=(ac,bd)$ es anillo
5) $(C,+,\cdot)$ tal que $C = \Re \times \Re$, $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$,
   $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$ es un anillo
6) $(Z_4,+,\cdot)$ es anillo
7) $(M(2,\Re),+,\cdot)$ es anillo donde $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy & az+cw \\ bx+dy & bz+dw \end{pmatrix}$

Proposición.

Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo con neutro aditivo 0 e inverso aditivo de a el elemento $-a$

Se cumple:

a) $a\cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \ \ \forall a \in A$
b) $(-a)\cdot b = a\cdot(-b) = -(a\cdot b) \ \ \forall a,b \in A$

Demostración.

a) $a\cdot 0 = 0 + a\cdot 0 = [-(a\cdot a)+(a\cdot a)] + a\cdot 0$
$$= -(a\cdot a) + [a\cdot a + a\cdot 0]$$
$$= -(a\cdot a) + a(a+0)$$
$$= -(a\cdot a) + a\cdot a = 0$$

Análogamente se demuestra que $0\cdot a = 0$

b) Demostraremos que $(-a)\cdot b$ y $-(a\cdot b)$ son inversos aditivos de $a\cdot b$, entonces, por la unicidad del inverso concluiremos que $(-a)\cdot b = -(a\cdot b)$

$(-a)\cdot b + a\cdot b = (-a+a)\cdot b = 0\cdot b = 0$, así, $(-a)\cdot b$ es inverso aditivo de $a\cdot b$

Por otro lado , es inmediato que $-(a\cdot b)$ es inverso aditivo de $a\cdot b$

De manera análoga se demuestra que $a\cdot(-b) = -(a\cdot b)$

Corolario.

Si $(A,+,\cdot)$ es un anillo entonces: $a\cdot b \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \wedge b \neq 0 \ \ \forall \text{a, b} \in \text{A}$

En efecto, usando la contrapositiva y la parte a) de la proposición anterior tenemos: $(a=0 \vee b=0) \Rightarrow a\cdot b = 0$

Observación.

El recíproco del corolario no se cumple, ya que, por ejemplo

a) En el anillo $(M(2,\Re),+,\cdot)$ se tiene $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) En el anillo $(Z_4,+,\cdot)$ se tiene $\overline{2}\cdot\overline{2} = \overline{0}$

Definición.
Un anillo conmutativo es un triple $(A,+,\cdot)$ tal que:

a) $(A,+,\cdot)$ es anillo
b) $\cdot$ es conmutativa

Ejemplos.
a) $(Z,+,\cdot)$ es anillo conmutativo
b) El anillo $(M(2,\Re),+,\cdot)$ no es conmutativo
c) En general $(Z_m,+,\cdot)$ es anillo conmutativo
d) El anillo $(M(2,\Re),+,\cdot)$ no es conmutativo ya que por ejemplo

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Definición.
Un anillo con identidad es un triple $(A,+,\cdot)$ tal que:

a) $(A,+,\cdot)$ es anillo
b) Existe $1\in A$ tal que $1\cdot a = a\cdot 1 = a \quad \forall a\in A$

Ejemplos.
1) $(Z,+,\cdot)$ es anillo con unidad
2) $(M(2,\Re),+,\cdot)$ es anillo con $1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
3) $(\Re\times\Re,+,*)$ tal que $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ y $(a,b)*(c,d)=(ac,bd)$ es anillo con unidad $1=(1,1)$
4) $(C,+,\cdot)$ tal que $C=\Re\times\Re$, $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$,
$(a,b)*(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$ es un anillo con unidad $1=(1,0)$
5) $(Z_4,+,\cdot)$ es anillo conmutativo con unidad

5.2.3 Dominio de Integridad.

Una de las formas para solucionar una ecuación de segundo grado es factorizar, allí usamos la proposición $(a\cdot b=0)\Leftrightarrow(a=0\vee b=0)$, sin embargo existen algunos conjuntos donde esto no ocurre, por ejemplo, en Z_4 tenemos $\overline{2}\cdot\overline{2}=\overline{0}$.

Definición.
Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo. Si $a,b\in A$ son no nulos tal que $a\cdot b=0$ con 0 el neutro para + entonces, a y b se llaman *divisores del cero*

Ejemplos.
1) $(Z_6,+,\cdot)$ es anillo con divisores del cero
2) $(M(2,\Re),+,\cdot)$ es anillo con divisores del cero

Teorema.

Un anillo $(A,+,\cdot)$ no tiene divisores del cero si y sólo si es válida la ley de cancelación para la multiplicación.

Demostración

$\Rightarrow)$ Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo sin divisores del cero y $a,b,c \in A$ tal que $c \neq 0$, debemos demostrar que: si $a \cdot c = b \cdot c$ entonces $a = b$, veámoslo:

$a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a \cdot c - b \cdot c = 0 \Rightarrow (a-b) \cdot c = 0$; como $(A,+,\cdot)$ es un anillo sin divisores del cero y $c \neq 0$ entonces $a - b = 0$, de donde, $a = b$

$\Leftarrow)$ Supongamos que se cumple la cancelación para la multiplicación, debemos demostrar que: $a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$

Si $a \neq 0$ entonces $a \cdot b = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0 \cdot b$ de donde $b = 0$

Definición.

Un *dominio de integridad* es un triple $(A,+,\cdot)$ tal que:

a) $(A,+,\cdot)$ es anillo conmutativo con identidad

b) $(a \neq 0 \wedge b \neq 0) \Rightarrow a \cdot b \neq 0)$ donde el neutro para + es 0

Observación.

Sea $(A,+,\cdot)$ un dominio de integridad, entonces:

a) $(a \cdot c = b \cdot c) \Rightarrow a = b \quad \forall a,b,c \in A,$ c $\neq 0$

b) La ecuación $a \cdot x = b$, $a \neq 0$ tiene solución única

c) $a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$

Ejemplos.

a) $(Z_5,+,\cdot)$ es dominio de integridad

b) $(C,+,\cdot)$ tal que $C = \Re \times \Re$, $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$, $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$ es dominio de integridad

Observación.

En el anillo $(Z_4,+,\cdot)$, la ecuación $2 \cdot x = 0$ tiene dos soluciones, naturalmente que nos interesa una estructura tal que una ecuación del tipo $a \cdot x = b$ tenga solución única; en la estructura de *cuerpo* una ecuación del tipo $a \cdot x = b$ tiene solución y es única.

5.2.4 Cuerpo

Definición.

El triple $(A,+,\cdot)$ e un *cuerpo* si y sólo si:

a) $(A,+,\cdot)$ es anillo conmutativo con unidad 1

b) $\forall a \in A - \{0\} \exists a^{-1} \in A$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$

Ejemplos.

a) $(Z_3,+,\cdot)$ es cuerpo

b) $(C,+,\cdot)$ tal que $C = \Re \times \Re$; $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$,

$(a,b)*(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$ es cuerpo donde $(a,b)^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$

Observación.

a) Si $(A,+,\cdot)$ es un cuerpo entonces $(A,+,\cdot)$ es dominio de integridad; en efecto: sólo falta demostrar que $(a \neq 0 \wedge b \neq 0) \Rightarrow a \cdot b \neq 0$; lo demostraremos usando la contrapositiva $(a \cdot b = 0) \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$

Supongamos que $a \cdot b = 0$ y que $b \neq 0$, entonces $(a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0 \cdot b^{-1}$, de aquí deducimos que $a = 0$, lo que constituye una contradicción.

b) El recíproco no es cierto, es decir, $(A,+,\cdot)$ dominio de integridad no implica que $(A,+,\cdot)$ sea un cuerpo, ya que, por ejemplo, $(Z,+,\cdot)$ es dominio de integridad y sin embargo no es un cuerpo

5.3 EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Decida si las siguientes operaciones son o no ley de composición interna en el conjunto declarado
   a) $*: Z \times Z \to Z$ tal que $a*b = ab+2$
   b) $*$ definida en $Z - \{0\}$ tal que $x*y = \frac{x}{y} + 2$
   c) $\circ$ definida en Z tal que $a \circ b = (a+b)^2$
   d) $*$ definida en Z tal que $a*b = \frac{a+b-2}{3}$
   e) $*$ definida en Q tal que $a*b = \frac{a+b-2}{3}$
   f) La multiplicación usual definida en $A = \{1,0,2\}$; $B = \{0,1\}$; $C = \{2,4,6...\}$
   g) $\cup : P(A) \times P(A) \to P(A)$ donde A es un conjunto y P(A) es la potencia de A

2) Sea $*$ ley de composición interna definida en el conjunto E , demuestre:
   a) $(a = b) \Rightarrow a*c = b*c \quad \forall a,b,c \in E$
   b) $(a = b) \Rightarrow c*a = c*b \quad \forall a,b,c \in E$

3) Decida cuales de las siguientes “leyes de composición internas”son asociativas:
   a) $*$ definida en $\Re$ tal que $a*b = a+b+ab$
   b) $*$ definida en $\Re$ tal que $a*b = a+2b$
   c) La unión de conjuntos , $\cup : P(A) \times P(A) \to P(A)$

4) Decida cuales de las siguientes “leyes de composición internas” tienen neutro e para la operación binaria interna definida
   a) $\cap : P(A) \times P(A) \to P(A)$ tal que $(P,R) \to P \cap R$ donde A es un conjunto y P(A) es la potencia de A

b) $*$ definida en Q^+ tal que $a*b=\frac{ab}{2}$

c) $*$ definida en $\Re$ tal que $a*b=a+b+1$

d) $*$ definida en $\Re$ tal que $x*y=xy+x$

5) Sea $*$ una ley de composición interna en el conjunto E. Demuestre: Si existe elemento neutro para $*$, este elemento es único.

6) Decida cuales de las siguientes "leyes de composición internas" son conmutativas para la operación binaria interna definida

a) $*$ definida en $\Re$ tal que $a*b=a+b+3ab$

b) $*$ definida en $\Re$ tal que $a*b=a-b+2ab$

7) Determine la tabla de multiplicar para $*$ definida en el conjunto $E=\{1,2,3,4\}$ tal que $a*b=\text{máx}\{a,b\}$

8) Sea $*$ ley de composición interna definida en el conjunto E tal que la operación es asociativa y tiene neutro e. Demuestre que: si $x\in E$ tiene inverso $\bar{x}$ entonces este es único.

9) En T se define la ley de composición interna $*$ por $a*b=a+b-ab$
Estudie la asociatividad, conmutatividad, elemento neutro y elemento inverso.

10) En Z se define la operación binaria interna $*$ tal que $a*b=a+b^2$
Estudie la asociatividad, conmutatividad, elemento neutro y elemento inverso.

11) En $Q\times Q$ se define $\oplus$ por $(a,b)\oplus(c,d)=(ac,ad+b)$
Estudie la asociatividad, conmutatividad, elemento neutro y elemento inverso.

12) En el conjunto $S=\{a,b,c\}$ se define $*$ por la siguiente tabla:

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

Estudie la asociatividad, conmutatividad, elemento neutro y elemento inverso.

13) En Z se define las operaciones binaria interna $*$ y $\circ$ por $a*b=a+b+1$ y $a\circ b=a+b+ab$

a) ¿Es el par $(Z,*)$ un grupo?

b) ¿Es el par $(Z,\circ)$ un grupo?

c) ¿Es $*$ distributiva con respecto de $\circ$?

d) ¿ Es $\circ$ distributiva con respecto de $*$?

14) Sea $A = \{a, b\}$ y $(A, *)$ un grupo. Demuestre que el grupo es conmutativo

15) Sea $(G, *)$ un grupo, demuestre:

a) $a * c = b * c \Leftrightarrow a = b \ \ \forall a, b, c \in G$

c) la ecuación $a * x = b$ tiene solución única en G

16) Demuestre que $(C, +)$ es un grupo si $C = \{(x, y) / x, y \in \Re\}$ es el conjunto de los números complejos donde $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

17) Demuestre que $(M(2, \Re), +)$ donde $M(2, \Re) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} / a, b, c, d \in \Re \right\}$ es el conjunto de las matrices cuadradas de tamaño 2 en $\Re$ y $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + e & c + g \\ b + f & d + h \end{pmatrix}$, es un grupo

18) En $\Re^+$ definimos las operaciones binarias internas $*$ y $\circ$ tal que $a * b = b^a$ y $a \circ b = ab$. Demuestre que $*$ distribuye por la izquierda a $\circ$ pero que no hace por la derecha

19) Demuestre que el par $(\Re - \{1\}, *)$ es un grupo donde $a * b = a + b + ab$

Resuelva la ecuación $2 * x * 6 = 18$

20) Demuestre que el trío $(Z, +, \cdot \otimes)$ es un anillo donde + es la suma usual y $a \oplus b = 2ab$

21) Demuestre que el trío $(M(2, \Re), +, \cdot)$ con las características dadas en el ejercicio 17 y $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + cf & ag + ch \\ be + df & bg + dh \end{pmatrix}$ es un anillo

22) Demuestre que el trío $(C, +, \cdot)$ con las características del ejercicio 16 y donde $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ es un anillo

23) Demuestre que $(Z_4, +, \cdot)$ es un anillo

24) Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo con neutro aditivo 0 y opuesto aditivo de $a \in A$ el elemento $-a$. Demuestre:

a) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \ \ \forall a \in A$

b) $(-a)b = a(-b) = -(ab) \ \ \forall a, b \in A$

25) ¿Los anillos de los ejercicios 21 y 22 son dominio de integridad?

26) Demuestre: Un anillo $(A, +, \cdot)$ no tiene divisores del cero si y sólo si es valida la ley de cancelación para la multiplicación.

CAPITULO 6

NUMEROS COMPLEJOS

6.1 Introducción

La ecuación $x^2+1=0$ no tiene solución en el cuerpo de los números reales $\Re$ ya que no existe un número real x tal que $x^2=-1$. Necesitamos un conjunto que contenga a $\Re$, que solucione lo que soluciona $\Re$ y que, por ejemplo, solucione el problema planteado, tal conjunto es el conjunto de los números complejos C.

Se define al conjunto C como: $C=\{z=(a,b)/a,b\in\Re\}$

6.2 Operaciones con complejos

Definición

Sean $z_1=(a,b)$, $z_2=(c,d)\in C$, entonces: $z_1=z_2 \Leftrightarrow (a,b)=(c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$

Definición.

Sean $z_1=(a,b)$, $z_2=(c,d)\in C$, entonces, la suma de complejos , denotada +, es tal que : $z_1+z_2=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\in C$

Ejemplo.
Si $z_1=(-2,6)$, $z_2=(4,3)$ entonces $z_1+z_2=(-2,6)+(4,3)=(2,9)$

Teorema.

$(C,+)$ es un grupo conmutativo, es decir

1) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$, $\forall\, z_1,z_2,z_3\in C$; Asociatividad de la suma
2) Existe el complejo z_N tal que $z_N+z=z+z_N=z$, $\forall\, z\in C$; z_N: neutro aditivo
3) $\forall\, z\in C$ $\exists\, z_{op}\in C$ tal que $z+z_{op}=z_{op}+z=z_N$; z_{op}: opuesto de z
4) $z_1+z_2=z_2+z_1$ $\forall\, z_1,z_2\in C$; Conmutatividad de la suma

Demostración.

2) Sean $z=(a,b)$, $z_N=(x,y)\in C$; imponiendo la condición de neutro tenemos:
$z+z_N=z$, es decir, $(a,b)+(x,y)=(a,b)$; debemos determinar x e y

$$(a,b)+(x,y)=(a,b) \Rightarrow (a+x,y+b)=(a,b) \Rightarrow \begin{cases} a+x=a \\ y+b=b \end{cases}$$; como este sistema

ocurre en $\Re$ entonces $x=0$, $y=0$, de donde $z_N=(0,0)$

Por otro lado, $z_N+z=(0,0)+(a,b)=(a,b)=z$

4) Sean $z_1 = (a,b)$, $z_2 = (c,d) \in C$ entonces:

$$z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \overset{*}{=} (c+a, d+b) = (c,d) + (a,b) = z_2 + z_1$$

* : por la conmutatividad de la suma en $\Re$

Es inmediato determinar que

a) $z_N = (0,0)$ es único y lo dotamos por 0

b) Si $z = (a,b)$ entonces $z_{op} = (-a,-b)$ es único y lo denotamos por $-z$

Definición.

Sean $z = (a,b) \in C$, $\mathrm{k} \in \Re$ entonces, la ponderación del complejo z por el escalar k, denotada kz, es tal que: $kz = k(a,b) = (ka,kb) \in C$

Observación.

1) $1z = z$; $\forall \mathrm{z} \in \mathrm{C}, 1 \in \Re$
2) $(k_1 + k_2)z = k_1 z + k_2 z$; $\forall \mathrm{z} \in \mathrm{C}$, $\forall \mathrm{k}_1, k_2 \in \Re$
3) $(k_1 k_2)z = k_1(k_2 z)$; $\forall \mathrm{k}_1, k_2 \in \Re$, $\forall \mathrm{z} \in \mathrm{C}$
4) $k(z_1 + z_2) = kz_1 + kz_2$; $\forall \mathrm{k} \in \Re$, $\forall \mathrm{z}_1, z_2 \in C$

Ejemplo.

Sean $z_1 = (3,-2)$, $\mathrm{z}_2 = (2,4) \in C$ entonces $3z_1 - 2z_2 = 3(3,-2) - 2(2,4) = (5,-14)$

Definición.

Sean $z_1 = (a,b)$, $z_2 = (c,d) \in C$, entonces el producto de complejos es tal que : $z_1 z_2 = (a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc) \in C$

Teorema.

Se cumple:

1) $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3$, $\forall\, z_1, z_2, z_3 \in C$ Asociatividad del producto
2) Existe el complejo z_N tal que $z_N \cdot z = z \cdot z_N = z$, $\forall\, \mathrm{z} \in \mathrm{C}$; z_N : neutro multiplicativo
3) $\forall\, \mathrm{z} \in \mathrm{C} - \{0\} \exists\, \mathrm{z}_{\mathrm{inv}} \in C$ tal que $\mathrm{z} \cdot \mathrm{z}_{\mathrm{inv}} = z_{inv} \cdot z = z_N$, z_{inv}: inverso multiplicativo
4) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ $\forall\, \mathrm{z}_1, z_2 \in C$, Conmutatividad del producto

Demostración.

2) Sean $z = (a,b)$, $z_N = (x,y) \in C$ entonces, como debe cumplirse que $z_N \cdot z = z$ tenemos:

$$z_N \cdot z = z \Rightarrow (x,y)(a,b) = (a,b) \Rightarrow (xa - yb, xb + ya) = (a,b)$$

Por la igualdad de complejos deducimos el sistema $\begin{cases} xa - yb = a \\ xb + ya = b \end{cases}$; multiplicando la primera ecuación por a y la segunda ecuación por b , sumando obtenemos: $xa^2 + xb^2 = a^2 + b^2$ de donde $x = 1$; podemos deducir que $y = 0$, de donde $z_N = (1,0)$

Por otro lado, $z \cdot z_N = (a,b)(1,0) = (a-0,0+b) = (a,b) = z$

3) Sean $z = (a,b) \in C - \{0\}$, $z_{inv} = (x,y)$, entonces se debe cumplir que $z \cdot z_{inv} = z$, es decir, se debe cumplir que $(a,b)(x,y) = (1,0)$; tenemos:

$(a,b)(x,y) = (1,0) \Rightarrow (ax-by, ay+bx) = (1,0) \Rightarrow \begin{cases} ax-by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases}$, multiplicando la primera ecuación por a, la segunda ecuación por b y sumando, obtenemos $a^2x + b^2x = a$ de donde $x = \frac{a}{a^2+b^2}$; usted puede concluir que $y = \frac{-b}{a^2+b^2}$, de donde, el inverso multiplicativo de $z = (a,b)$ es: $z_{inv} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$

Observación

a) $z_N = (1,0)$ es único y lo dotamos por 1

b) Si $z = (a,b)$ entonces $z_{inv} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$ es único y lo denotamos por z^{-1}, así; $(a,b)^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$

Observación.

Definimos el cuociente $\frac{z_1}{z_2}$; $z_1, z_2 \in C, z_2 \neq 0$ por $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$

6.3 Subconjuntos de C

Existen dos importantes subconjuntos de C:

a) Complejos reales, denotado $C_{\Re}$, tal que $C_{\Re} = \{z = (a,b) / b = 0\} \subseteq C$.

b) Complejos imaginarios, denotado I, tal que $I = \{z = (a,b) / a = 0\} \subseteq C$

Observación.

1) Aceptaremos que existe un isomorfismo entre $C_{\Re}$ y $\Re$ el cual nos permite identificar el complejo real $(a,0)$ con el real a, así, $(a,0) = a$

2) En los complejos imaginarios, la unidad imaginaria es $i = (0,1)$

Potencias de i

Se cumple:

a) $i = (0,1)$

b) $i^2 = -1$ ya que $i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$

c) $i^3 = -i$

d) $i^4 = 1$

e) $i^n = \begin{cases} i \text{ si } n = 4p+1 \\ -1 \text{ si } n = 4p+2 \\ -i \text{ si } n = 4p+3 \\ 1 \text{ si } n = 4p \end{cases}$, $n, p \in N$

Observación.

1) C no es ordenado
   Haremos la demostración por reducción al absurdo
   Supongamos que C es ordenado, entonces existe $C^+ \subseteq C$ tal que:
   $a)\ z_1, z_2 \in C^+ \Rightarrow \begin{cases} (z_1 + z_2) \in C^+ \\ z_1 \cdot z_2 \in C^+ \end{cases}$
   b) $\forall z \in C$ se cumple sólo una de las siguientes:
   $i)\ z \in C^+\ ii) - z \in C^+\ iii) z = 0$

Sea $i = (0,1) \in C$ y supongamos que $i \in C^+$, entonces por a) $i^2 = -1 \in C^+$, así, por a) $(-1)(-1) = 1 \in C^+$, es decir, -1 y $1 \in C^+$ ($\Rightarrow\Leftarrow$)

Por otro lado si suponemos que $-i \in C^+$, entonces por a) $(-i)^2 = i^2 - 1 \in C^+$, así,

por a) $(-1)(-1) = 1 \in C^+$, es decir, -1 y $1 \in C^+$ ($\Rightarrow\Leftarrow$)

Así, C no puede ser un conjunto ordenado

2) Si $p \in \Re^-$ entonces $\sqrt{p} = i\sqrt{-p} \in C$

En efecto, sea $\sqrt{p} = (x, y)$ donde $p = (p,0)$ entonces $(p,0) = (x, y)(x, y)$ es decir

$(p,0) = (x^2 - y^2, 2xy)$, de aquí concluimos que $\begin{cases} p = x^2 - y^2 \\ 0 = 2xy \end{cases}$

De la segunda ecuación concluimos que $x = 0 \lor y = 0$, notamos que $y \neq 0$, ya que si $y = 0$ entonces $\sqrt{p} = (x,0) = x \in \Re$ (esto es una contradicción) luego $x = 0$.

Como $x = 0$ entonces, reemplazando en la primera ecuación del sistema obtenemos $p = -y^2$ es decir, $y^2 = -p \in \Re^+$, luego $y = \sqrt{-p} \in \Re$; finalmente $\sqrt{p} = (0, \sqrt{-p}) = i\sqrt{-p}$

6.4 Complejos en forma canónica

Sea $z = (a,b) \in C$ entonces la forma canónica del complejo es $z = a + bi$

En efecto, $z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,b)(0,1) = a + bi$

Notación.

Sea $z = a + bi$ un número complejo entonces: la parte real de z, denotada $\mathrm{Re}(z)$ es $a = \mathrm{Re}(z)$ y la parte imaginaria de z, denotada $\mathrm{Im}(z)$ es $b = \mathrm{Im}(z)$

6.5 Operatoria con complejos canónicos

La suma, producto y ponderación por escalar se realiza como si ellos fuesen polinomios considerando las potencias de i.

Por ejemplo; $(5-4i)(2+3i) = 10 + 15i - 8i - 12i^2 = 10 + 7i + 12 = 22 + 7i$

La división de complejos en forma canónica se efectúa, amplificando por el "conjugado" del complejo divisor, por ejemplo, $\dfrac{2+3i}{4+5i} = \dfrac{2+3i}{4+5i} \cdot \dfrac{4-5i}{4-5i}$; al efectuar las multiplicaciones obtenemos:

$$\frac{8-10i+12i-15i^2}{16-25i^2} = \frac{8-10i+12i-15(-1)}{16-25(-1)} = \frac{23+2i}{41} = \frac{23}{41} + \frac{2}{41}i$$

6.6 Conjugado de un complejo

Definición.

Sea $z = (a,b) \in C$, definimos el conjugado del complejo z, denotado $\overline{z}$ como: $\overline{z} = (a,-b) \in C$

Teorema.

Para todo $z_1, z_2 \in C$ se cumple:

1) $\overline{(\overline{z})} = z$
2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$
5) $z + \overline{z} = 2a$, $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$ si $z = (a,b)$

Demostración de 1, 2 y 5

1) Si $z = a + bi$ entonces $\overline{z} = a - bi$ de donde $\overline{(\overline{z})} = a + bi = z$

2) Si $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ entonces $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$ de donde $\overline{z_1 + z_2} = (a+c) - (b+d)i = (a - bi) + (c + di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

5) Si $z = (a,b)$ entonces $z + \overline{z} = (a,b) + (a,-b) = (2a,0) = 2a$; por otro lado

$$z \cdot \overline{z} = (a,b)(a,-b) = (a^2 + b^2, 0) = a^2 + b^2$$

Ejemplo
Determine $z \in C - \{0\}$ tal que $z^2 = \overline{z}$
Solución.
Sea $z = a + bi$ entonces, imponiendo la condición obtenemos $(a+bi)^2 = a - bi$

$$(a+bi)^2 = a - bi \Rightarrow a^2 + 2abi + b^2 i^2 = a - bi$$

$$\Rightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = a - bi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a & (1) \\ 2ab = -b & (2) \end{cases}$$

De (2) y suponiendo que $b \neq 0$ obtenemos: $a = -\frac{1}{2}$; reemplazando en (1) conseguimos $(-\frac{1}{2})^2 - b^2 = -\frac{1}{2}$, de aquí concluimos que $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces los complejos que se obtienen son $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Si $b = 0$ entonces reemplazando en (1) conseguimos: $a^2 = a$, de donde $a = 0$, $a = 1$; como no puede ocurrir que a = 0 entonces el complejo que se determina, ahora es z = 1

6.7 Norma o módulo de un complejo

Definición.

Sea $z = (a,b) = a + bi$ un número complejo entonces, la norma del complejo, denotada $|z|$ es tal que $|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$

Teorema

Para todo $z_1, z_2 \in C$ se cumple:

1) $|z| \geq 0$

2) $|z| = |\overline{z}|$

3) $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ o $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

4) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

5) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$

6) $|\text{Re}(z)| \leq |\ z\ |$, $|\text{Im}(z)| \leq |\ z\ |$

7) $\text{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $\text{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2}$

8) $|\ z_1 + z_2| \leq |\ z_1| + |\ z_2|$

9) $\left| \sum_{i=1}^{n} z_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\ z_i|$

Demostración.

Demostración de la propiedad 8)

$$|\ z_1 + z_2|^{\ 2} = (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)}$$

$$= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})$$

$$= z_1 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2}$$

$$\overset{*}{=} |\ z_1|^2 + 2\,\text{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) + |\ z_2|^2$$

$$\overset{**}{\leq} |\ z_1|^2 + 2|\ z_1 \cdot z_2| + |\ z_2|^2$$

$$= (|\ z_1| + |\ z_2|)^2$$

Sacando raíz cuadrada conseguimos lo pedido

* : $\text{Re}(z) \leq |\text{Re}(z)| \leq |\ z\ |$

** : $\dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2}{2} = \text{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$

6.8 Forma trigonométrica de un número complejo

Considere el número complejo $z = (a,b) = a + bi$, entonces definimos el argumento de z , denotado $\arg(z) = \theta$, como aquel ángulo θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tal que $\theta = arctg\,\dfrac{b}{a}$; además, si $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ concluimos que la forma trigonométrica de z es:

$$z = r(\cos\theta + isen\theta)$$

Ejemplo:
Escriba en forma trigonométrica los siguientes números complejos

a) $z_1 = 2 + 2i$
b) $z_2 = -2 - 2i$
c) $z_3 = -2 + 2i$
d) $z_4 = 2 - 2i$
e) $z_5 = 2i$
f) $z_6 = -3$

Solución.

a) Como $a = 2, b = 2$ entonces $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$; por otro lado , el complejo está en el primer cuadrante, de donde $\theta = arctg\frac{b}{a} = arctg 1 = 45^o$, así entonces $z_1 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos 45^o + isen 45^o)$

b) Como $a = -2, b = -2$ entonces $r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$; por otro lado , el complejo está en el tercer cuadrante, de donde $\theta = arctg\frac{b}{a} = arctg 1 = 225^o$, así entonces $z_2 = -2 - 2i = 2\sqrt{2}(\cos 225^o + isen 225^o)$

c) $z_3 = -2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos 135^o + isen 135^o)$

d) $z_4 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}(\cos 315^o + isen 315^o)$

e) $z_5 = 2i = 2(\cos 90^o + isen 90^o)$ ya que el complejo esta en el eje Y y el argumento es, inmediatamente, $\theta = 90^o$

f) $z_6 = -3 = 3(\cos 180^o + isen 180^o)$

6.9 Operatoria con complejos trigonométricos

Teorema.

Sean $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + isen\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + isen\theta_2)$ dos complejos, entonces:

a) $z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1 + isen\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + isen\theta_2) = r_1 \cdot r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2))$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + isen\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + isen\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2))$; $z_2 \neq 0$

c) $z^n = [r(\cos\theta + isen\theta)]^n = r^n(\cos(n\theta) + isen(n\theta))$; $n \in N$

Observación.

1) El teorema en su parte a) y b) se demuestra con ayuda de las identidades trigonométricas: $sen(\alpha \pm \beta) = sen\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha\ sen\beta$

2) La parte c) del teorema se demuestra usando inducción y se llama Teorema de De Moivre

3) Si $z = r(\cos\theta + isen\theta) \neq 0$ entonces:

   a) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\cos 0^o + isen0^o}{r(\cos\theta + isen\theta)} = \dfrac{1}{r}(\cos(-\theta) + isen(-\theta)) = \dfrac{1}{r}(\cos\theta - isen\theta)$

   b) $\dfrac{1}{z^n} = \dfrac{1}{r^n}(\cos n\theta - sen\, n\theta)$

Ejemplo.
Calcule $(-1+i)^{42}$
Solución.

Como $z = -1+i = \sqrt{2}(\cos 135^o + isen135^o)$ entonces

$$(-1+i)^{42} = \left\lfloor \sqrt{2}(\cos 135^o + isen135^o) \right\rfloor^{42}$$

$$= (\sqrt{2})^{42}(\cos(42\cdot 135)^o + isen(42\cdot 135)^o)$$

$$= 2^{21}(\cos 5.670^o + isen5.670^o)$$

$$= 2^{21}(\cos(15\cdot 360 + 270)^o + isen(15\cdot 360 + 270)^o)$$

$$= 2^{21}(\cos 270^o + isen270^o) = -2^{21} i$$

Ejemplo

Escriba en forma $a+bi$ la expresión $\left(\dfrac{10\sqrt{3}+10i}{5+5i}\right)^{-6}$

Solución

Escribimos cada complejo en su forma trigonométrica, los dividimos, aplicamos el Teorema de DeMoivre y listo.

$$\left(\frac{10\sqrt{3}+10i}{5+5i}\right)^{-6} = \left(\frac{5+5i}{10\sqrt{3}+10i}\right)^{6}$$

$$= \left(\frac{5\sqrt{2}(\cos 45^o + isen 45^o)}{20(\cos 30^o + isen 30^o)} \right)^6$$

$$= \left[\frac{5\sqrt{2}}{20} (\cos(45^o - 30^o) + isen(45^o - 30^o)) \right]^6$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{4} (\cos 15^o + isen 15^o) \right]^6$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^6 (\cos 90^o + isen 90^o)$$

$$= \frac{1}{8}(0 + i) = \frac{1}{8} i$$

Definición.

Sea $z \in C - \{0\}$; $n \in N, n > 1$. Decimos que $w \in C$ es una raíz n-ésima de z si y sólo si $w^n = z$.

Observación.

Si denotamos $w = \sqrt[n]{z}$ entonces: $w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z$

Ejemplo.

Verifique que $w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, $w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, $w_3 = 1$ son raíces cúbicas de 1

Solución.

Debemos demostrar que $w_i^3 = 1, i = 1,2,3$

Como $w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i = \cos(120^o + isen 120^o)$ entonces, usando el teorema de DeMoivre obtenemos: $w_1^3 = [\cos 120^o + isen 120^o]^3 = \cos 360^o + isen 360^o = 1$

De manera análoga,

$$w_2^3 = (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i)^3 = (\cos 240^o + isen 240^o)^3 = \cos 720^o + isen 720^o = 1$$

6.10 Raíces del complejo $z = r(\cos\theta + isen\theta) \neq 0$

Las n raíces n-ésimas del complejo $z = r(\cos\theta + isen\theta) \neq 0$ son:

$$w_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta + k \cdot 360^o}{n} + isen\frac{\theta + k \cdot 360^o}{n}) \text{ donde } k = 0,1,2,...,n-1$$

Observación.

Note que $w_k^n = \left[\sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\theta + k\cdot 360^o}{n} + isen\dfrac{\theta + k\cdot 360^o}{n}\right]^n$

$$= (\sqrt[n]{r})^n(\cos\frac{\theta + k\cdot 360^o}{n}\cdot n + isen\frac{\theta + k\cdot 360^o}{n}\cdot n)$$

$$= r(\cos\theta + isen\theta) = z$$

Ejemplo.
Calcule las tres raíces cúbicas de –8
Solución.

Como $z = -8 = 8(\cos 180^o + isen180^o)$ entonces

$\sqrt[3]{-8} = \sqrt{8(\cos 180^o + isen180^o)} = w_k = \sqrt[3]{8}(\cos\dfrac{180^o + k360^o}{3} + isen\dfrac{180^o + k360^o}{3})$,
$k = 0,1,2$

Si $k = 0$ entonces $w_0 = 2(\cos 60^o + isen60^o) = 2(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{3}i) = 1 + i\sqrt{3}$

Si $k = 1$ entonces $w_1 = 2(\cos 180^o + isen180^o) = 2(-1 + 0i) = -2$

Si $k = 2$ entonces $w_2 = 2(\cos 300^o + isen300^o) = 2(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{3}i) = 1 - i\sqrt{3}$, así,

$$\sqrt[3]{-8} = \begin{cases} -2 \\ 1 + i\sqrt{3} \\ 1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

Ejemplo.
Determine $m, n \in \Re$ tal que $z = 1 + i$ sea raíz de la ecuación $z^5 + mz^3 + n = 0$
Solución.
Si $z = 1 + i$ entonces $z = \sqrt{2}(\cos 45^o + isen45^o)$ de donde:

$$z^5 = \left[\sqrt{2}(\cos 45^o + isen45^o)\right]^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5(\cos 225^o + isen225^o) = \left(\sqrt{2}\right)^5(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -4 - 4i$$

$$z^3 = \left[\sqrt{2}(\cos 45^o + isen45^o)\right]^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3(\cos 125^o + isen125^o) = \left(\sqrt{2}\right)^3(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -2 + 2i$$

De $z^5 + mz^3 + n = 0$ obtenemos $(-4-4i) + m(-2+2i) + n = 0 + 0i$ es decir,

obtenemos $\begin{cases} -4-2m+n=0 \\ -4+2m=0 \end{cases}$. Como $m = 2$, si reemplazamos este valor en la

ecuación $-4-2m+n=0$ conseguimos $n = 8$

Ejemplo
Calcule el valor de $(1+w)^3 + (1+w^2)^9$ si, w es raíz cúbica de 1 y distinta de la unidad
Solución.

Ya hemos visto en un ejemplo anterior ,las tres raíces cúbicas del 1; las dos raíces distintas del 1 son: $w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$; $w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, sin embargo, no conviene reemplazar cada uno de estas raíces en la igualdad planteada, nos conviene realizar el calculo de la siguiente manera.

Como w es raíz cúbica de 1 entonces $w^3 = 1$, de aquí obtenemos $w^3 - 1 = 0$, factorizando tenemos $(w-1)(w^2+w+1) = 0$

Como $w \neq 1$ entonces $w^2 + w + 1 = 0$ así, $1 + w = -w^2$ y $1 + w^2 = -w$ entonces
$(1+w)^3 + (1+w^2)^2 =$
$(-w^2)^3 + (-w)^9 = -w^6 - w^9 = -(w^3)^2 - (w^3)^3 = -1 - 1 = -2$

6.11 Forma exponencial

La ecuación $e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta$ que define a $e^{i\theta}$, $\forall\, \theta \in \Re$ se conoce como la fórmula de Euler; así, $z = r(\cos\theta + isen\theta) = re^{i\theta}$

Observación.

Se puede demostrar:

a) $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
b) $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Ejemplos.

1) Calcule $(1-i)^{23}$
Solución.
$(1-i)^{23} = (\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i})^{23} = 2^{\frac{23}{2}} e^{-\frac{23\pi}{4}}$

2) Demuestre que:

a) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

b) $sen\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Demostración.

a) $\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{\cos\theta + isen\theta + \cos(-\theta) + isen(-\theta)}{2} = \cos\theta$

b) Se demuestra de manera análoga

3) Demuestre que $sen^3\theta = \frac{3}{4}sen\theta - \frac{1}{4}sen3\theta$

Demostración.

$$sen^3\theta = (\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i})^3$$

$$= \frac{(e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}(e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^{33}}{8i^3}$$

$$= -\frac{1}{8i}(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta})$$

$$= -\frac{3}{-8i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) - \frac{1}{8i}(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta})$$

$$= \frac{3}{4}\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} - \frac{1}{4}\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i}$$

$$= \frac{3}{4}sen\theta - \frac{1}{4}sen3\theta$$

6.12 EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Determine los números reales x e y tal que $3(x+2) + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$

Resp. $x = -\frac{23}{11}$, $y = \frac{16}{11}$

2) En los siguientes ejercicios reduzca a la forma $a+bi$

a) $(3+5i)+(5+2i)-(4+7i)^2$ b) $(2+3i)(5-3i)(-4+5i^5)$

c) $\frac{-5-2i}{4+i}+\frac{2+5i}{3i}$ d) $\frac{3}{4(5-i)(4+6i)}$

e) $\frac{(-5+i)(1+i)}{3-i}+i$ f) $\left[\frac{2i^{37}}{(2+i)(3+4i)}\right]^2$

g) Si $z=a+bi$,determine:

i) $\frac{\text{Re}(z)}{i\,\text{Im}(iz)}$ ii) $[1-\text{Re}(z)+i\,\text{Im}(z)][1-\text{Re}(z)-i\,\text{Im}(z)]$

Resp. i) $-i$ ii) $1+a^2+b^2-2a$

3) Si $z_1=1+2i$, $z_2=-2+i$, $z_3=-1-i$, calcule:

a) $2z_1+3z_2+3$ b) $\frac{z_1}{iz_2}$ c) $z_1^2+2z_3^2$ d) $\frac{z_1+z_3}{1+z_2}$

4) Represente en el plano

a) $\{z\in C\,/\,\text{Re}(z)=2\}$ Resp. Recta de ecuación $x=2$

b) $\{z\in C\,/\,1\le \text{Re}(z)\le 2\,,\,0\le \text{Im}(z)\le 3\}$

c) $\{z\in C\,/\,|z|\le 1\}$ Resp, Círculo con centro en (0,0) y radio menor o igual a 1

d) $\{z\in C\,/\,|z-i|\le 4\}$

e) $\{z\in C\,/\,\text{Re}((z-1)^2)=\text{Re}(2z(z-1))\}$ Resp Hipérbola $1=x^2-y^2$

f) $\{z\in C\,/\,\overline{(z+1)}(z+1)+2\,\text{Re}(z+1)\le 0\}$

5) Determine: Re(p) e Im(p) si p es:

a) z^3 b) $\frac{2i}{z}$ c) $\frac{3}{z^2}$ donde $z=a+bi$ donde $ab\neq 0$

Resp. a) $\text{Re}(p)=a^3-3ab^2$, $\text{Im}(p)=3a^2b$

b) $\text{Re}(p)=\frac{2b}{a^2+b^2}$, $\text{Im}(p)=\frac{2a}{a^2+b^2}$

6) Determine $z\in C$ tal que:

a) $|z| - z = 1 + 2i$ Resp. $\frac{3}{2} - 2i$

b) $|z| + z = 2 + i$ Resp. $\frac{3}{4} + i$

c) $z \cdot \overline{z} + 3(z - \overline{z}) = 4 - 3i$ Resp. $\frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{1}{2}i$; $-\frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{1}{2}i$

d) $z \cdot \overline{z} + 2z = 3 + i$

7) Evalue las siguientes expresiones:

a) $|(2-3i)(5+4i)(1+i)|$ b) $\left|\frac{(2+i)(-3+4i)(5-3i)}{(3-4i)(5+3i)}\right|$

c) $\left|\frac{(3+5i)(5-2i)}{5+2i}\right|\left|\frac{-2}{3i}\right|$ Resp. a) $\sqrt{1.066}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\frac{2}{3}\sqrt{34}$

8) Demuestre que $\forall z \in C : \overline{z^2} = \overline{z}^2$

9) Encuentre los números complejos z que satisfacen las dos relaciones siguientes:

$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$ y $\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$

Resp. $z = 6 + 17i$, $z = 6 + 8i$

10) La suma de dos números complejos es 3+2i. La parte real de uno de ellos es 2. El cuociente entre ellos es imaginario puro. Hallar ambos números

Resp. $z_1 = 2 + (1+\sqrt{3})i$, $z_2 = 1 + (1-\sqrt{3})i$; $z_1 = 2 + (1-\sqrt{3})i$, $z_2 = 1 + (1+\sqrt{3})i$

11) Analice si se cumplen las siguientes igualdades:

a) $\frac{\overline{(2+i)}^2}{3-4i} = 1$ b) $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

12) Verifique si el número complejo $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ satisface la ecuación

$\frac{3}{z+1} - \frac{1}{z} = 1$

13) Demuestre que:

a) $(z - \overline{z})^2 \leq 0 \quad \forall z \in C$ b) Si $z^2 = \overline{z}^2$ entonces $z \in \Re \vee \mathrm{Re}(z) = 0$

14) Determine $z \in C$ tal que $|z| = \dfrac{1}{|z|} = |1-z|$

Resp. $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

15) Resuelva: $\begin{cases} (1+i)z - iu = 2+i \\ (2+i)z + (2-i)u = 2i \end{cases}$, $z, u \in C$

Resp. $z = \dfrac{6-9i}{13}$, $u = \dfrac{-16+11i}{13}$

16) Si $(w + \dfrac{1}{w}) \in \Re$, $w \in C$, demuestre que $\operatorname{Im}(w) = 0 \vee |w| = 1$

17) Si $z, w \in C$ y $|z| = 1$, demuestre que $\left| \dfrac{z+w}{\bar{z} \cdot w + 1} \right| = 1$

18) Calcular:

a) $\left| \dfrac{z}{w} \right|$ si $\dfrac{z+w}{z-w} = 1+4i$ tal que $z, w \in C$ Resp. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

b) $\left| \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{u} \right|$ si $z = 3-4i$, $u = 4+3i$

c) $\left| \dfrac{1}{z - z^2} \right|$ si $z = 2i$ Resp. $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

19) Calcule

a) $\left(1 - \dfrac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^{12}$ b) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{10}$

20) Usando De Moivre y Teorema del Binomio demuestre que:

a) $sen(3\theta) = 3sen(\theta) - 4sen^3(\theta)$

b) $\cos(3\theta) = 4sen^3(\theta) - 3\cos(\theta)$

21) Exprese en forma $a+bi$

a) $z=\sqrt{-7+24i}$

b) $z=\left(\dfrac{10\sqrt{3}+10i}{5+5i}\right)^{-6}$

c) $z=\sqrt{6+i\sqrt{3}}$ Resp. $z=\pm\sqrt{\dfrac{13}{2}}\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

d) $z=\sqrt{-11-60i}$ Resp. $z=5-6i$, $z=-5+6i$

c) $S=1+\dfrac{1}{1+i}+....+\dfrac{1}{(1+i)^{27}}$

22) Si $w\neq 1$ es una raíz cúbica de 1 verifique si:

a) $(1+w^2)^4=w$

b) $(1-w+w^2)(1+w-w^2)=4$

c) $(2+2w+5w^2)^6=729$

23) Demuestre que:

a) $(1+i)^n=2^{n/2}(\cos\dfrac{n\pi}{4}+isen\dfrac{n\pi}{4})$; $n\in N$

b) $(\sqrt{3}-i)^n=2^n(\cos\dfrac{n\pi}{6}+isen\dfrac{n\pi}{6})$; $n\in N$

24) Verifique que:

$$(1+i)(1+i\sqrt{3})(\cos\theta+isen\vartheta)=2\sqrt{2}\left[\cos(\frac{7\pi}{12}+\theta)+isen(\frac{7\pi}{12}+\theta)\right]$$

25) Calcule, usando forma trigonométrica

a) $(\sqrt{3}+i)(1+i)$ b) $(1+i\sqrt{3})(1-i)$ c) $\dfrac{1-i}{1+i}$

d) $\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$ e) $(1-i)^{10}$ f) $(2\sqrt{3}+2i)^6$

g) $(1-i)^{16}+(1+i)$ h) $\dfrac{5+5i}{10\sqrt{3}+10i}$ j) $(1+i)^{42}$

26) Resuelva:
a) $\sqrt[3]{-i}$ b) $\sqrt[3]{4\sqrt{3}-4i}$ c) $\sqrt[4]{1}$

27) Encuentre las 5 raíces quintas de la unidad

28) Resuelva la ecuación $z^6-2iz^3-1=0$; $z\in C$

29) Si $x_n+iy_n=(1+i\sqrt{3})^n \quad \forall n\in N$ demuestre que $x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1}=2^{2n-2}\sqrt{3}$

30) Demuestre que $(1+i\sqrt{3})^n+(1-i\sqrt{3})^n=2^{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{3}$

31) Sea $z\neq 1$ una raíz n-ésima de la unidad. Demuestre que para todo natural distinto del uno se cumple: $1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}=0$

32) Resuelva la ecuación.
a) $x^4+8+8i\sqrt{3}=0$ b) $x^6+7x^3-8=0$

33) Sea $x_n+iy_n=(1+i\sqrt{3})^{3n}$. Demuestre que $x_n+2^3x_{n-1}=0$

34) Si $z=(n-1)!+n!i$ y $w=1+ni$, pruebe que $|zw|=(n-1)!(1+n^2)$

CAPITULO 7

POLINOMIOS
7.1 Definiciones
Definición.

Sea K un cuerpo. Un polinomio en *x*, con coeficientes en K es toda expresión del tipo $p(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$; $a_i, x \in K; n \in N \cup \{0\}$ donde todos los coeficientes a_i son nulos, excepto una cantidad finita de ellos

Notación.
Al conjunto de todos los polinomios en la indeterminada *x* con coeficientes en K lo denotamos $K[x]$

Definición

Sea $p(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in K[x]$, definimos el grado de *p(x)* , denotado $\partial(p(x))$, como aquel $m \in N \cup \{0\}$ tal que a_m es el último coeficiente no nulo.

Ejemplos.
1) Si $p(x)=2+3x-5x^2$ entonces $\partial(p(x))=2$
2) Si $p(x)=2x$ entonces $\partial(p(x))=1$
3) Si $p(x)=5$ entonces $\partial(p(x))=0$
4) El polinomio nulo no tiene grado

Observación.
1) Podemos escribir los polinomios en orden decreciente
2) Para simplificar la notación podemos escribir $\partial(p)$ en lugar de $\partial(p(x))$

7.2 Suma y multiplicación de polinomios
Definición.

Sean $p(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $q(x)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in K[x]$, decimos que $p(x)=q(x)$ si y sólo si son idénticos, es decir, $p(x)=q(x) \Leftrightarrow a_i = b_i \ \ \forall i$

Ejemplo.

Sean $p(x)=(a-b)x^4+(c-1)x^3+(d+c)x$, $q(x)=7x^3+(2d+b)x^2-2x$ dos polinomios definidos en los reales, determine $a,b,c,d \in \Re$ para que $p(x)=q(x)$

Solución

Se debe cumplir: $\begin{cases} a-b=0 \\ c-1=7 \\ d+c=-2 \\ 2d+b=0 \end{cases}$; es decir, para $a=20, b=20, c=8, d=-10$

Definición

Sean $p(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, q(x)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in K[x]$ entonces:

1) $p(x)+q(x)=d(x)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ tal que $c_i = a_i + b_i \quad \forall i$

2) $p(x)\cdot q(x)=e(x)=\sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i$ tal que $d_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$

Observación.

Se puede demostrar que:

a) $\partial(p+q) \le máx\{\partial(p), \partial(q)\}$ si $\partial(p+q)$ existe

b) $\partial(p\cdot q)=\partial(p)+\partial(q)$

Ejemplo.

Sean $p(x)=4x^3-2x^2+3x$, $q(x)=2x^2+5x-2 \in \Re[x]$.

Si $p(x)\cdot q(x)=r(x)=\sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i$, determine d_2

Solución.

$$d_2 = \sum_{k=0}^{2} a_k b_{2-k} = a_0 b_{2-0} + a_1 b_{2-1} + a_2 b_{2-2} = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$
$$= 0\cdot 2 + 3\cdot 5 + (-2)\cdot(-2) = 19$$

Notemos que $r(x)=8x^5+(20-4)x^4+(-8-10-6)x^3+(4+15)x^2+(-6)x$

Teorema (Algoritmo de Euclides)

Sean $p(x), q(x) \in \Re[x]$, $q(x)\neq 0$, entonces existen $s(x), r(x) \in \Re[x]$, únicos, tal que $p(x)=q(x)\cdot s(x)+r(x)$ donde $r(x)=0 \vee \partial(r)<\partial(q)$

Observación.

Al polinomio *s(x)* lo llamamos cuociente y al polinomio *r(x)* lo llamamos resto

Ejemplo.

Sea $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 4$, $q(x) = x - 2 \in \Re[x]$. Determine el resto y el cuociente que se produce al dividir $p(x)$ por $q(x)$

Solución.

$$
\begin{array}{l}
x^3 + 2x^2 - 3x - 4 : x - 2 = x^2 + 4x + 5 \\
\underline{\mp x^2 \pm 2x^2} \\
\quad 4x^2 - 3x - 4 \\
\quad \underline{\mp 4x^2 \pm 8x} \\
\qquad 5x - 4 \\
\qquad \underline{\mp 5x \pm 10} \\
\qquad\quad 6
\end{array}
$$

Hemos obtenido: $s(x) = x^2 + 4x + 5$, $r(x) = 6$ de donde podemos escribir $x^3 + 2x^2 - 3x - 4 = (x^2 + 4x + 5)(x - 2) + 6$ o equivalentemente

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 3x - 4}{x - 2} = x^2 + 4x + 5 + \frac{6}{x - 2}$$

Observación.

Cuando el polinomio divisor es de la forma $x - a$ podemos efectuar la división mediante "división sintética", método que mostramos con el desarrollo del mismo problema anterior, tenemos:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & 2 & -3 & -4 & 2 \\
\hline
 & 2 & 8 & 10 & \\
\hline
1 & 4 & 5 & 6 &
\end{array}
$$

Note que el cuociente es $s(x) = x^2 + 4x + 5$ y el resto es $r(x) = 6$

7.3 Teorema del resto

Definición.

$a \in \Re$ es un cero de $p(x) \in \Re[x]$ o raíz de la ecuación $p(x) = 0$ si y sólo si $p(a) \equiv 0$

Ejemplo.

$a = -3$ es raíz de $p(x) = x^2 + x - 6 = 0$ ya que $p(-3) = (-3)^2 + (-3) - 6 \equiv 0$

Teorema del resto

Si $p(x) \in \Re[x]$ y $a \in \Re$ entonces el resto que se produce al dividir $p(x)$ por $x - a$ es $p(a)$

Demostración.

Por el Algoritmo de Euclides tenemos: $p(x)=(x-a)s(x)+r(x)$ donde $r(x)=0$ o $\partial(r(x))<\partial(x-a)=1$; esto nos indica que en cualquier caso el resto es una constante, es decir $r(x)=r=C^{te}$, entonces $p(x)=(x-a)s(x)+r$; es inmediato concluir que $p(a)=(a-a)s(a)+r=r$

Ejemplos.

1) Si $p(x)=x^{30}-1, q(x)=x-1$ entonces al dividir $p(x)$ por $q(x)=x-1$ el resto que se produce es $r=p(1)=1^{30}-1=0$ de donde , la división es exacta

2) Determine $k\in\Re$ para que:

a) $p(x)=2x^3+kx^2-3x-4$ sea divisible (exactamente) por $x+1$

b) $p(x)=x^4+2x^3-3x^2+kx-7$ sea divisible por $x-2$ y tenga resto 3

Solución.

a) Se debe cumplir que $p(-1)=0$. Como $p(-1)=-2+k+3-4=0$ entonces $k=3$

b) Se debe cumplir que $p(2)=3$. Como $p(2)=16+16-12+2k-7=3$ entonces $k=-15$

3) Sean 1 y 5 el resto que se produce al dividir $p(x)\in\Re[x]$ por $x+2$ y $x-3$ respectivamente. Determine el resto que se produce al dividir $p(x)$ por producto $(x+2)(x-3)$.

Solución.

Usando el Algoritmo de Euclides tenemos: $p(x)=(x+2)(x-3)q(x)+r(x)$ donde el resto $r(x)$ debe ser a lo más de grado 1, sea $r(x)=ax+b$ entonces $p(x)=(x+2)(x-3)q(x)+(ax+b)$, debemos determinar $a,b\in\Re$

Como $p(-2)=1$ y $p(3)=5$ entonces el sistema que se produce es $\begin{cases}-2a+b=1\\3a+b=5\end{cases}$

de donde, resolviendo obtenemos $a=\dfrac{4}{5}, b=\dfrac{13}{5}$, así, el resto que se produce al dividir $p(x)$ por $(x+2)(x-3)$ es $r(x)=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{13}{5}$

Teorema.

$a\in\Re$ es un cero de $p(x)\in\Re[x]\Leftrightarrow(x-a)$ es factor de $p(x)$

Demostración.

$\Rightarrow$) $a\in\Re$ cero de $p(x)\Rightarrow p(a)=0$, por otro lado, como $p(x)=(x-a)s(x)+r$
entonces $p(a)=(a-a)s(x)+r=0$ de donde $r=0$, así, $p(x)=(x-a)s(x)$, lo que nos indica que $(x-a)$ es factor de $p(x)$

$\Leftarrow$) Si $(x-a)$ es factor de $p(x)$ entonces $p(x)=(x-a)s(x)$, así, $p(a)=(a-a)s(x)=0$ de donde $a\in\Re$ es cero de $p(x)$

Ejemplo.

Encuentre una ecuación mónica de grado mínimo cuyas raíces sean $2\,,0\,,1\,,-5$

Solución.

Por el Teorema anterior concluimos que $x-2,\ x-0,\ x-1,\ x+5$ son factores de $p(x)$, así, el polinomio pedido es $p(x)=x(x-2)(x-1)(x+5)$

Nos debe motivar "factorizar" un polinomio, para ello, tenemos el siguiente teorema.

Ejemplo

Determine A y B de modo que $p(x)=x^4+x^3+Ax^2+Bx+30$ sea divisible tanto por $x-2$ como por $x+3$

Solución

Como $p(x)=0$ es divisible por $x-2$ entonces $x=2$ es un cero $p(x)$ de donde $p(2)=16+8+4A+2B+30=0$, es decir, $4A+2B=-54$

De manera análoga, $p(-3)=81-27+9A-3B+30=0$, de donde $9A-3B=-84$

El sistema que se produce es $\begin{cases} 4A+2B=-54 \\ 9A-3B=-84 \end{cases}$ y la solución es $A=-11\,,\ B=-5$

7.4 Número de raíces de una ecuación

Demostraremos que toda ecuación polinomial de grado n tiene n raíces, para ello necesitamos el siguiente teorema

Teorema (Teorema Fundamental del Álgebra, TFA)

La ecuación polinomial $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1x+a_0=0\,,\ a_n\neq 0$ tiene, por lo menos, una raíz real o compleja

Observación.

La demostración del Teorema está fuera del alcance de esta sección y lo usaremos para demostrar el siguiente teorema.

Teorema.

La ecuación polinomial $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1x+a_0=0\,,\ a_n\neq 0$ tiene, exactamente n raíces

Demostración.

Por el TFA, la ecuación planteada tiene al menos una raíz, sea ella r_1; entonces $x-r_1$ es factor de $p(x)$ de donde: $p(x)=(x-r_1)q_1(x)=0$, con $q_1(x)$ de grado tal que el coeficiente de x^{n-1} es a_n.

Aplicando el TFA a $q_1(x) = a_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0 = 0$, afirmamos que existe al menos una raíz, sea ella $x = r_2$, así, $q_1(x) = (x - r_2)q_2(x)$ de donde $p(x) = (x - r_1)(x - r_2)q_2(x) = 0$.

Si repetimos el proceso obtenemos $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)......(x - r_n) = 0$, de donde $r_1, r_2, ..., r_n$ son raíces de la ecuación.

Demostraremos ahora que esas raíces son las únicas; supongamos que r es otra raíz de $p(x) = 0$, entonces debería cumplirse que $p(r) = 0$, sin embargo esto último no es cierto ya que $p(r) = a_n(r - r_1)(r - r_2)......(r - r_n) \neq 0$

7.5 Raíces racionales

Teorema

Si una fracción irreducible $\frac{c}{d} \in Q$ es raíz de la ecuación $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$; $a_n \neq 0$ entonces c es divisor de a_0 ($c\big|_{a_0}$) y d es divisor de a_n ($d\big|_{a_n}$)

Demostración.

Como $\frac{c}{d} \in Q$ es raíz de la ecuación $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ entonces $p(\frac{c}{d}) = 0$

$$p(\frac{c}{d}) = 0 \Rightarrow a_n\left(\frac{c}{d}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{c}{d}\right)^{n-1} + ... + a_1\left(\frac{c}{d}\right) + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow a_n\frac{c^n}{d^n} + a_{n-1}\frac{c^{n-1}}{d^{n-1}} + ... + a_1\frac{c}{d} + a_0 = 0 / d^n \neq 0$$

$$\Rightarrow a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1}d + ... + a_1cd^{n-1} + a_0d^n = 0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow a_{n-1}c^{n-1}d + ... + a_1cd^{n-1} + a_0d^n = -a_nc^n$$

Como d divide la primer lado de la igualdad anterior entonces d divide a $-a_nc^n$, y dado que d no divide a c entonces d debe dividir a a_n

Análogamente, de (*) tenemos $a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1}d + ... + a_1 cd^{n-1} = -a_0 d^n$, de lo cual concluimos que c debe dividir a a_0

Observación.

1) El Teorema nos entrega las posibles raíces racionales de la ecuación.
2) Usando la contrapositiva concluimos que: si d no divide a a_n o c no divide a a_0 entonces $\frac{c}{d}$ no es raíz de la ecuación

Ejemplo.

Resuelva la ecuación $p(x) = 2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 12 = 0$

Solución.

Las posibles raíces racionales de la ecuación son $\frac{c}{d}$ donde $c|_{12}$ y $d|_2$.

Como $c \in \{\pm 1, \ \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$ y $d \in \{\pm 1, \ \pm 2\}$ entonces las posibles raíces

racionales son $\frac{c}{d} \in \left\{\pm 1, \ \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}\right\}$.

Ahora debemos determinar, por reemplazo, alguna raíz:

Como $p(1) = 4 \neq 0$ entonces $x = 1$ no es raíz de la ecuación.

Como $p(-1) = 2 + 1 - 11 - 4 + 12 = 0$ entonces $x = -1$ es raíz de la ecuación, así

entonces $p(x) = 2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 12 = (x+1)s(x)$; este polinomio $s(x)$ lo podemos

determinar por división sintética; tenemos:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & -11 & 4 & 12 & -1 \\ \hline & -2 & 3 & 8 & -12 & \\ \hline 2 & -3 & -8 & 12 & 0 & \end{array}$$

, de donde

$s(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$; así:

$$p(x) = 2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 12 = (x+1)(2x^3 - 3x^2 - 8x + 12) = 0$$

Repetimos el proceso para la ecuación $s(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$; las posibles

raíces racionales son $\frac{c}{d} \in \left\{\pm 1, \ \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}\right\}$ y obtenemos

$s(2) = 16 - 12 - 16 + 12 = 0$, de donde $s(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = (x-2)m(x)$, este $m(x)$

lo obtenemos por división sintética; tenemos:

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & -8 & 12 & 2 \\ \hline & 4 & 2 & -12 & \\ \hline 2 & 1 & -6 & 0 & \end{array}$$

de donde

$m(x) = 2x^2 + x - 6$, así, $s(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = (x-2)(2x^2 + x - 6)$ y entonces

$$p(x) = 2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 12 = (x+1)(x-2)(2x^2 + x - 6) = 0$$

Como el polinomio cuadrático $2x^2 + x - 6$ se factoriza por $(2x-3)(x+2)$ entonces

$p(x) = 2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 12 = (x+1)(x-2)(2x-3)(x+2) = 0$ de donde las raíces de la ecuación son: $x = -1,\ x = 2,\ x = \frac{3}{2},\ x = -2$

Observación.

1) En lugar de factorizar podría resolver la ecuación $2x^2 + x - 6 = 0$

2) Todas las raíces de la ecuación original estaban en el conjunto de las posibles raíces racionales, sin embargo, si intenta detectarlas, sólo por reemplazo, podríamos tener problemas en el caso en que alguna de ellas tenga multiplicidad dos o más.

Ejemplo
Resuelva la ecuación $4x^4 - 4x^3 - 5x^2 + x + 1 = 0$
Solución.
Como $c \in \{\pm 1\}$ y $d \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ entonces las posibles raíces racionales de la ecuación $p(x) = 0$ son $\frac{c}{d} \in \left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}\right\}$

Dado que $p(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{5}{4} + \frac{1}{2} + 1 = 0$ entonces $x = \frac{1}{2}$ es raíz de la ecuación y luego, $(x - \frac{1}{2})$ es factor de $p(x)$, así, $p(x) = (x - \frac{1}{2})s(x)$.

Al dividir $p(x)$ por $x - \frac{1}{2}$ obtenemos $s(x) = 4x^3 - 2x^2 - 6x - 2$, de donde

$$p(x) = 4x^4 - 4x^3 - 5x^2 + x + 1 = (x - \frac{1}{2})(4x^3 - 2x^2 - 6x - 2) = 0$$

Si aplicamos otra vez el método a la ecuación $s(x) = 4x^3 - 2x^2 - 6x - 2 = 0$, las posibles raíces racionales son $\frac{c}{d} \in \left\{ \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4} \right\}$

Como $s(-\frac{1}{2}) = 0$ entonces $s(x) = (x + \frac{1}{2})m(x)$ y, al dividir $s(x)$ por $x + \frac{1}{2}$ obtenemos $m(x) = 4x^2 - 4x - 4$.

Al resolver la ecuación $m(x) = 0$ obtenemos $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Finalmente, las raíces pedidas son: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

7.6 Naturaleza de las raíces

Teorema

Si un número complejo $z = a + bi$ es raíz de la ecuación polinomial $p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = 0$, $a_i \in \Re$ entonces el conjugado $\overline{z} = a - bi$ también es raíz de la ecuación.

Demostración.

Como $z = a + bi$ es raíz de la ecuación entonces $p(z) = 0$. Notamos que las potencias pares de bi producen números reales y las potencias impares de bi producirán expresiones imaginarias.

Si denotamos por A a la suma algebraica de los números reales y por Bi a la suma algebraica de los números imaginarios entonces $p(z) = 0$ se puede escribir como $A + Bi = 0$, de donde $A = B = 0$

Si ahora analizamos $p(\overline{z})$ las potencias pares de $-bi$ tienen el mismo valor que las potencias pares de bi y las potencias impares de $-bi$ sólo diferirán de las potencias impares de bi en el signo, así $p(\overline{z}) = A - Bi$; como $A = B = 0$ entonces $p(\overline{z}) = 0$, por lo cual $\overline{z} = a - bi$ también es raíz de la ecuación $p(x) = 0$

Ejemplos

1) Si $x = 1 + i$ es raíz de la ecuación $p(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$ determine las otras raíces de la ecuación.

Solución.

Como $x = 1 + i$ es raíz de la ecuación entonces $x = 1 - i$ también es raíz de la ecuación, así $x - (1 + i)$ y $x - (1 - i)$ son factores de $p(x)$, en consecuencia podemos escribir $p(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = (x - (1 + i))(x - (1 - i))q(x) = 0$

Como $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2 - 2x + 2$ entonces el polinomio se puede escribir como $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = (x^2 - 2x + 2)q(x)$, de donde $q(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 6x - 4}{x^2 - 2x + 2} = x - 2$

Tenemos $p(x) = (x-(1+í))(x-(1-i)(x-2) = 0$, por lo tanto las raíces pedidas son: $x = 1+i$, $x = 1-i$, $x = 2$

2) Determine $a, b \in \Re$ para que $p(x) = x^4 + 2x^3 + ax + b = 0$ tenga raíz $z = 1+i$
Solución.
Si $z = 1+i$ es raíz de $p(x) = 0$ entonces $\overline{z} = 1-i$ también es raíz, así, $x-(1+i)$ y $x-(1-i)$ son factores de $p(x)$, es decir, $p(x) = (x-(1+i))(x-(1-i))s(x)$; como $(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2 - 2x + 2$ entonces $p(x) = (x^2 - 2x + 2)s(x)$.

Al dividir $x^4 + 2x^3 + ax + b$ por $x^2 - 2x + 2$ el resto que se produzca debe ser igual a cero y, allí obtenemos la ecuación para determinar $a, b \in \Re$ pedidos; tal resto es $(12 + a - 8)x + (b - 12)$ de donde: $a = -4$, $b = 12$

Este problema también podemos resolverlo usando la teoría de números complejos; tenemos:
Como $z = 1+i$ es raíz de $p(x) = x^4 + 2x^3 + ax + b = 0$ entonces se cumple:
$(1+i)^4 + 2(1+i)^3 + a(1+i) + b = 0 + 0i$, calculemos las potencias allí señaladas, usando DeMoivre, tenemos:

$$(1+i)^4 = \left[\sqrt{2}(\cos 45^o + i \operatorname{sen} 45^o)\right]^4 = 4(\cos 180^o + i \operatorname{sen} 180^o) = 4(-1+0i) = -4$$

$$(1+i)^3 = \left[\sqrt{2}(\cos 45^o + i \operatorname{sen} 45^o)\right]^3 = 2\sqrt{2}(\cos 135^o + i \operatorname{sen} 135^o) = 2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 + 2i$$

así, la ecuación queda: $-4 + 2(-2+2i) + a(1+i) + b = 0 + 0i$, de aquí concluimos:

$$\begin{cases} -4 - 4 + a + b = 0 \\ 4 + a = 0 \end{cases}$$, es decir, $a = -4$, $b = 12$

3) Sea $p(x) = x^4 - 3x^3 - 27x - 36 \in \Re[x]$ tal que bi es raíz de $p(x) = 0$; determine las otras raíces de la ecuación.

Solución.

Como bi es raíz de $p(x)=0$ entonces $(bi)^4-3(bi)^3-27(bi)-36=0$, de esto concluimos que $b^4i^4-3b^3i^3-27bi-36=0+0i$, así, podemos deducir el siguiente sistema: $\begin{cases} b^4-5b^2-36=0 \\ 3b^3-27b=0 \end{cases}$; de la segunda ecuación obtenemos $3b(b^2-9)=0$; como

$b\neq 0$ entonces $b^2-9=0$ de donde $b=\pm 3$

Para cualquiera que sea el valor de b concluimos que $3i$ y $-3i$ son ceros de

$p(x)$,así, $p(x)=(x-3i)(x+3i)s(x)$

Como $(x-3i)(x+3i)=x^2+9$ entonces el cuociente $s(x)$ se obtiene dividiendo

$p(x)$ por x^2+9; tal s(x) es $s(x)=x^2-3x-4$, de donde

$p(x)=(x-3i)(x+3i)(x^2-3x-4)$; resolviendo la ecuación $x^2-3x-4=0$ conseguimos $x=4$, $x=-1$

Las raíces de $p(x)=0$ son: $3i,\ -3i,\ 4,\ -1$

7.7 Algunas ayudas para encontrar raíces.

Ayuda 1 (cota superior de las raíces)

Si en la ecuación polinomial $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$, con coeficientes reales se cumple: $a_n>0$, el primer coeficiente negativo esta precedido por r coeficientes positivos o nulos y si a_k es el coeficiente negativo de mayor valor absoluto entonces cada raíz α de la ecuación es menor que $1+\sqrt[r]{\frac{|a_k|}{a_n}}$

Ejemplo

En la ecuación real $p(x)=x^5+2x^4-18x^2+41x+30=0$ tenemos que: $r=3$,

$a_k=-18$, $a_n=1$, así, toda raíz α es tal que $\alpha<1+\sqrt[2]{\frac{|-18|}{1}}=1+\sqrt{18}\approx 5{,}3$

Note que las posibles raíces racionales de la ecuación son $\frac{c}{d}\in\{\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 5,\pm 6,\pm 15,\pm 30\}$ y que el acotamiento de las raíces por lo menos elimina 4 posibles raíces; en definitiva las raíces son 2, 3, -1, -1, -5

Ayuda 2 . Regla de los signos de Descartes

Definición.

Sea la ecuación polinomial $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, con coeficientes reales; decimos que dos coeficientes consecutivos a_k, a_p tienen una variación de signo si $a_k \cdot a_p < 0$

Denotamos por V al número de variaciones de signo de $p(x) = 0$

Ejemplos.

1) La ecuación $3x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 5 = 0$ tiene dos variaciones de signo, en tanto que, la ecuación $x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ tiene cero variaciones de signo

2) Encuentre las raíces de la ecuación $3x^3 + 11x^2 + 8x - 4 = 0$

Solución.

Las posibles raíces racionales de la ecuación son de la forma $\frac{p}{q}$ tal que p es divisor de –4 y q es divisor de 3; como $p \in \{\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4\}$ y $q \in \{\pm 1, \ \pm 3\}$ entonces las posibles racionales son tal que $\frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4, \ \pm \frac{1}{3}, \ \pm \frac{2}{3}, \ \pm \frac{4}{3}\right\}$

Para decidir cuales de las posibles raíces racionales son, en definitiva, raíces racionales
de la ecuación debemos verificar si $m(x) = 0$ donde $m(x) = 3x^3 + 11x^2 + 8x - 4$

Al verificar, detectamos que $m(-2) = 0$, así, -2 es raíz de la ecuación, es decir, $x + 2$ es factor de $p(x)$ entonces, $3x^3 + 11x^2 + 8x - 4 = (x+2)s(x)$; debemos determinar el cuociente $s(x)$, lo cual lo realizamos por división sintética, tenemos:

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 11 & 8 & -4 & -2 \\ \hline & -6 & -10 & 4 & \\ \hline 3 & 5 & -2 & 0 & \end{array}$$

. El polinomio buscado es $s(x) = 3x^2 + 5x - 2$ de donde, el polinomio $m(x)$ es $m(x) = (x+2)(33x^2 + 5x - 2)$ y la ecuación es $m(x) = (x+2)(3x^2 + 5x - 2) = 0$

Si resolvemos la ecuación $3x^2 + 5x - 2 = 0$ obtenemos $x = \frac{1}{3}, \ x = -2$ así,

$3x^3 + 11x^2 + 8x - 4 = (x+2)(x - \frac{1}{3})(x+2)$ de donde, las raíces de la ecuación son:

$x = -2$ de multiplicidad 2 y $x = \frac{1}{3}$

Observación.

1) Si sólo intentáramos ubicar las posibles raíces por simple verificación entonces la raíz de multiplicidad 2 no la habríamos detectado.

2) Notemos que la Regla de los signos de Descartes nos indica que "el número de raíces positivas de la ecuación $m(x) = 3x^3 + 11x^2 + 8x - 4 = 0$ es el número de variaciones de signo de $m(x)$ o ese número disminuido en un número par", como el numero de variaciones de signos de $m(x)$ es 1 entonces el número de raíces positivas es 1; por otro lado "el número de raíces negativas de la ecuación $m(x) = 3x^3 + 11x^2 + 8x - 4 = 0$ es el número de variaciones de signo de $m(-x)$ o ese número disminuido en un número par", como $m(-x) = -3x^3 + 11x^2 - 8x - 4$ entonces el número de variaciones de signo es 2 y la cantidad de raíces negativas de la ecuación es 2 o ninguna.

Dado que el numero de raíces de la ecuación es 3 entonces la posible multiplicidad de las raíces es: 1 raíz positiva y 2 negativas o 1 raíz positiva, 0 raíz negativa y 2 raíces complejas; en definitiva se obtuvo la primera opción

Regla de los signos de Descartes

Sea la ecuación polinomial $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, con coeficientes reales. Si V es el número de variaciones de signo de $p(x) = 0$ entonces el número P de raíces positivas es P o ese número disminuido en una cantidad par

El número N de raíces negativas de la ecuación $p(x) = 0$ es igual al número de variaciones de sigo de $p(-x) = 0$ o ese número disminuido en una cantidad par

Ejemplo

Analice la ecuación $p(x) = 2x^4 - 5x + 1 = 0$

Solución.

Como $p(x)$ tiene dos variaciones de signo entonces la ecuación tiene 2 raíces positivas o ninguna.

Como $p(-x) = 2(-x)^4 - 5(-x) + 1 = 2x^4 + 5x + 1$ entonces la ecuación $p(x) = 0$ tiene ninguna raíz negativa. Así, la ecuación tiene: 2 raíces reales y 2 raíces complejas o 4 raíces complejas.

Como $p(0) = 1$ y $p(1) = -2$ entonces dado que el polinomio es "continuo" concluimos que existe una raíz real en el intervalo $(0,1) \subseteq \Re$, así, en definitiva, la ecuación tiene 2 raíces reales y 2 raíces complejas

Método de aproximaciones sucesivas

Es posible que a veces una ecuación polinomial no tenga raíces racionales, por ejemplo, la ecuación $p(x) = x^3 + x - 4 = 0$ tiene como posibles raíces racionales en el conjunto $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ y ninguna de ellas, en definitiva, es raíz

Por otro lado, la regla de las variaciones de signo nos indica que la ecuación tiene una raíz real positiva y dos raíces complejas. ¿Cómo obtenemos la raíz real, siendo esta una raíz irracional?

Para obtener, por aproximación, la raíz real positiva, debemos acotarla por dos enteros consecutivos; como $p(1) = -2$ y $p(2) = 6$ entonces la raíz pedida esta entre 1 y 2.

Un método puede ser el de determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1,2)$ y $(2,6)$ que es de la forma $ax + by + c = 0$ y determinar el valor de la variable
x cuando *y = 0*

El proceso se repita las veces necesarias

7.8 Relaciones entre coeficientes y raíces de una ecuación

En la ecuación polinomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$, se cumple la siguiente relación entre los coeficientes a_i , $i = 0,1,2,...,n$ y las n raíces r_i

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = \text{suma de las raíces de la ecuación}$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = \text{ suma de los dobles productos de las raíces}$$

$$-\frac{a_{n-3}}{a_n} = \text{ suma de los triples productos de las raíces}$$

. . .

. . .

$$(-1)^n \frac{a_0}{a_n} = \text{producto de las raíces}$$

Ejemplos.

1) Determine $k \in \Re$ en la ecuación $x^3 - 7x + k = 0$ para que una de sus raíces sea el doble de otra de ellas
   Solución.
   Sean $a, b, 2b$ las raíces con la condición impuesta entonces se cumple:
   $$a + b + 2b = -\frac{0}{1} = 0 \; ; \; ab + 2ab + 2b^2 = \frac{-7}{1} = -7 \; ; \; 2ab^2 = -\frac{k}{1} = -k$$

El sistema que debemos resolver es: $\begin{cases} a+3b=0 & (1) \\ 3ab+2b^2=-7 & (2) \\ 2ab^2=-k & (3) \end{cases}$

De (1) obtenemos $a=-3b$, reemplazando en (2) conseguimos

$-9b^2+2b^2=-7$, así, $b=\pm 1$

Si reemplazamos estos valores en (1) entonces:

$b=1 \Rightarrow a=-3$ de donde, en (3) obtenemos $k=-2(-3)1=6$
$b=-1 \Rightarrow a=3$ de donde, en (3) obtenemos $k=-2(-3)(-1)^2=-6$

Para $k=6$ y $k=-6$ se produce lo pedido

2) Si a,b,c son las raíces de la ecuación $x^3-px^2+qx-r=0$ determine el valor de la expresión $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

Solución.

Como, $a+b+c=-\frac{-p}{1}=p$, $ab+ac+bc=\frac{q}{1}=q$, $abc=-\frac{-r}{1}=r$ entonces la expresión $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{a^2b^2c}$ debe expresarse en función de p, q, r

Es inmediato conseguir $a^2b^2c^2=(abc)^2=r^2$, por otro lado, para determinar

$b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2$ usamos la expresión $(ab+ac+bc)^2$; tenemos

$(ab+ac+bc)^2=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2$

$=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)$, así, reemplazando los datos

obtenemos: $q^2=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2rp$,de donde ,$(ab+ac+bc)^2=q^2-2rp$,

entonces, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{a^2b^2c}=\frac{q^2-2rp}{r^2}$

3) Determine las raíces de $p(x) = 4x^3 - 12x^2 + 3x + 5 = 0$ si estas están en Progresión Aritmética.
Solución.
Sean $\alpha = a - d$, $\beta = a$, $\gamma = a + d$ las raíces (en Progresión Aritmética) de la ecuación, entonces, de $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{-12}{4}$ conseguimos $(a-d) + a + (a+d) = 3$, de esta última ecuación obtenemos $a = 1$

De la relación $\alpha\beta\gamma = -\frac{5}{4}$ conseguimos $(a-d)a(a+d) = -\frac{5}{4}$, es decir, conseguimos la ecuación $(1-d)(1+d) = -\frac{5}{4}$. Esta ecuación nos da los resultados $d = \pm\frac{3}{2}$
Si $d = \frac{3}{2}$ entonces $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $\gamma = \frac{5}{2}$
Si $d = -\frac{3}{2}$ entonces $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = 1$, $\gamma = -\frac{1}{2}$

7.9 FRACCIONES PARCIALES
7.9.1 Fracciones racionales

De la misma manera que el cuerpo Q de los números racionales se forma a partir del anillo Z de los enteros, es posible construir, a partir del anillo $K[x]$ un cuerpo, llamado el cuerpo de las fracciones racionales con coeficientes en K

Este cuerpo se denota por $K(x)$ y es el conjunto cuociente de $K[x] \times \{K[x] - \{0\}\}$ dado por la relación de equivalencia R

$$(f_1(x), g_1(x))R(f_2(x), g_2(x)) \Leftrightarrow f_1(x)g_2(x) = f_2(x)g_1(x)$$

Una fracción racional en la indeterminada x sobre K es, entonces, una clase de equivalencia representada por el par $(f(x), g(x))$ de polinomios de $K(x)$ en que $g(x) \neq 0$, otro par $(f_1(x), g_1(x))$ representa a al misma fracción racional si y sólo si $f(x)g_1(x) = f_1(x)g(x)$

Al elemento $(f(x), g(x))$, representante de una clase de equivalencia lo denotamos por $\frac{f(x)}{g(x)}$, entonces: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a(x)}{b(x)} \Leftrightarrow f(x)b(x) = g(x)a(x)$

7.9.2 Suma y multiplicación en $K[x] \times \{K[x] - \{0\}\}$

Definición
En $K[x] \times \{K[x] - \{0\}\}$ definimos las operaciones suma y multiplicación por:

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{f(x)b(x) + g(x)a(x)}{g(x)b(x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{f(x)a(x)}{g(x)b(x)}$$

Observación.
Es fácil verificar que $(K(x), +, \cdot)$ es un cuerpo; el elemento neutro para la adición es la fracción racional nula, denotada por 0, que es la clase de equivalencia del par $\frac{0}{g(x)}$ donde $g(x) \neq 0$; el elemento neutro para la multiplicación, llamada fracción racional unitaria y denotada por 1 es la clase de equivalencia de los pares $\frac{g(x)}{g(x)}$ donde $g(x) \neq 0$

Teorema y definición.
Para cada fracción racional de $K(x)$ existe un representante $\frac{f(x)}{g(x)}$ tal que los polinomios $f(x), g(x)$ son primos entre si. Todo otro representante con esta propiedad es de la forma $\frac{cf(x)}{cg(x)}$ donde $c \in K(x) - \{0\}$ es polinomio constante

Este representante único, $\frac{f(x)}{g(x)}$ se llama la forma irreducible de la fracción racional

7.10 FRACCIONES PARCIALES

Definición
Sea $\frac{f(x)}{g(x)} \in K(x) - \{0\}$, definimos el grado de $\frac{f(x)}{g(x)}$, denotado por $\partial(\frac{f(x)}{g(x)})$ por $\partial(\frac{f(x)}{g(x)}) = \partial(f(x)) - \partial(g(x))$.

La fracción racional $\frac{f(x)}{g(x)}$ es propia si $\partial(\frac{f(x)}{g(x)}) < 0$, en caso contrario se dice que es impropia

Observación.
Se puede demostrar que el grado de una fracción racional es independiente de la elección del representante de ella

Teorema
Sean $\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{a(x)}{b(x)}$ fracciones raciones propias entonces $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{a(x)}{b(x)}$ es propia
Demostración.
Usted debe demostrar que $\partial\left(\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{a(x)}{b(x)}\right) < 0$

Teorema.
Toda fracción racional se puede expresar, de manera única, como la suma de un polinomio y una fracción propia o la fracción nula
Demostración.
Sea $\dfrac{f(x)}{g(x)} \in K(x)$, como $g(x) \neq 0$ aplicamos el algoritmo de la división a $f(x)$ y $g(x)$ obteniendo $f(x) = e(x) \cdot g(x) + r(x)$ donde $r(x) = \begin{cases} 0 \\ \partial(r(x)) < \partial(g(x)) \end{cases}$, es inmediato concluir que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = e(x) + \dfrac{r(x)}{g(x)}$ tal que $e(x) \in K[x]$ y $\partial(\dfrac{r(x)}{g(x)}) < 0$; el polinomio $e(x)$ se llama la parte entera de la fracción racional $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Veamos ahora la unicidad
Supongamos que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = e_1(x) + \dfrac{r_1(x)}{g(x)}$ donde $r_1(x) = \begin{cases} 0 \\ \partial(r_1(x)) < \partial(g(x)) \end{cases}$.
Si $e(x) \neq e_1(x)$ entonces $\partial(e(x) - e_1(x)) = \partial(\dfrac{r(x)}{g(x)} - \dfrac{r_1(x)}{g(x)}) < 0$ lo que es una contradicción, así, $e(x) = e_1(x)$ y consecuentemente $\dfrac{r(x)}{g(x)} = \dfrac{r_1(x)}{g(x)}$

Teorema
Considere la fracción racional propia $\dfrac{f(x)}{g(x)} \in K(x)$ tal que $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$ en que los polinomios $g_1(x), g_2(x)$ son no nulos y primos entre si, entonces existen polinomios únicos $f_1(x), f_2(x)$ tal que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} + \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$, donde $\partial(f_1(x)) < \partial(g_1(x))$ y $\partial(f_2(x)) < \partial(g_2(x))$
Demostración.
Como siempre existen polinomios $u_1(x), u_2(x)$ tal que $1 = u_1(x)g_2(x) + u_2(x)g_1(x)$

entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)u_1(x)}{g_1(x)} + \dfrac{f(x)u_2(x)}{g_2(x)}$.

Denotando por $e_1(x)$ y $e_2(x)$ las partes enteras del primer y segundo sumando respectivamente tenemos:

$$\frac{f(x)u_1(x)}{g_1(x)} = e_1(x) + \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \text{ con } \partial(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}) < 0 \text{ y}$$

$$\frac{f(x)u_2(x)}{g_2(x)} = e_2(x) + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \text{ con } \partial(\frac{f_2(x)}{g_2(x)}) < 0 \text{ entonces}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = e_1(x) + e_2(x) + \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

Como $\partial(\frac{f(x)}{g(x)}) < 0$ y $\partial(\frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)}) < 0$ entonces $e_1(x) + e_2(x) = 0$ de donde

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \text{ donde } \partial(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}) < 0 \text{ y } \partial(\frac{f_2(x)}{g_2(x)}) < 0$$

Observación.

En el Teorema anterior y en las siguientes generalizaciones se supone que $\frac{f(x)}{g(x)}$ es una fracción irreducible

Teorema

Sea la fracción racional propia $\frac{f(x)}{g(x)} \in K(x)$ tal que $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot ..... \cdot g_n(x)$ en que $g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x)$ son polinomios no nulos y de dos en dos son primos relativos entre si, entonces existen polinomios $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + ... + \frac{f_n(x)}{g_n(x)} \text{ donde } \partial(f_i(x)) < \partial(g_i(x)) \text{ , } i = 1,2,...,n$$

Demostración

Por inducción

Teorema.

Considere la fracción racional propia $\frac{f(x)}{g(x)} \in K(x)$ tal que $g(x) = [g_1(x)]^{m_1} [g_2(x)]^{m_2} \cdot ... \cdot [g_n(x)]^{m_n}$ en la que $g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x)$ son polinomios no nulos y de dos en dos son primos relativos entre si y $m_1, m_2, ..., m_n \in N$ entonces existen polinomios únicos $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{[g_1(x)]^{m_1}} + \frac{f_2(x)}{[g_2(x)]^{m_2}} + ... + \frac{f_n(x)}{[g_n(x)]^{m_n}} \text{ donde } \partial(f_i(x)) < \partial(g_i(x)) \text{ , } i = 1,2,..,n$$

Demostración.

Si $g_i(x), g_j(x)$, $i \neq j$ son primos relativos entonces $[g_i(x)]^{m_i}$ y $[g_j(x)]^{m_j}$ también lo son y tenemos el teorema anterior

Observación.

1) Estos teoremas indican que la fracción racional propia $\frac{f(x)}{g(x)}$ se ha expresado como suma de fracciones parciales

2) El caso de la fracción parcial de la forma $\frac{f(x)}{[g(x)]^m}$, $m \in N$, puede ser susceptible de la descomposición:

$\frac{f(x)}{[g(x)]^m} = \frac{a_1(x)}{g(x)} + \frac{a_2(x)}{[g(x)]^2} + ... + \frac{a_m(x)}{[g(x)]^m}$ en que $\partial(a_i(x)) < \partial(g_i(x))$, $i = 1.2.,,,n$ o $a_i(x) = 0$

Demostración
Por inducción.
Si $m = 1$ entonces $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$
Para $m = 2$ aplicamos el algoritmo de la división a los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ obteniendo $\frac{f(x)}{g(x)} = a_1(x) + \frac{a_2(x)}{g(x)}$ donde $\partial(a_2(x)) < \partial g(x)$, de aquí concluimos que

$$\frac{f(x)}{[g(x)]^2} = \frac{a_1(x)}{g(x)} + \frac{a_2(x)}{[g(x)]^2}$$

Ya tenemos visto el método, usted puede completar la inducción

7.10.1 Aplicación en $C(x)$

Como los únicos polinomios irreducibles en $C[x]$ son los polinomios de grado 1 entonces toda fracción racional propia $\frac{f(x)}{g(x)} \in C[x]$ se puede decomponer en suma de fracciones parciales de la forma:

$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{A_{1i}}{(x - a_1)^i} + ... + \sum_{i=1}^{m_n} \frac{A_{ni}}{(x - a_n)^i}$ en que $A_{1i}, A_{2i}, ..., A_{ni} \in C$ y donde

$g(x) = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \cdot .... \cdot (x - a_m)^{m_n}$; $m_1, m_2, ..., m_n \in N$

7.10.2 Aplicación en $R[x]$

En $R(x)$ los únicos polinomios irreducibles son los polinomios de grado 1 y los polinomios cuadráticos ax^2+bx+c donde $b^2-4ac<0$.

Así, toda fracción racional $\dfrac{f(x)}{g(x)} \in R(x)$ se puede descomponer en suma de fracciones parciales de la forma:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{A_{1i}}{(x-a_1)^i} + \dots\dots\dots + \sum_{i=1}^{m_n} \frac{A_{ni}}{(x-a_n)^i}$$

$$+\sum_{j=1}^{r_1} \frac{B_{1j}x + C_{1j}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^j} + \dots\dots + \sum_{j=1}^{r_p} \frac{B_{pj}x + C_{pj}}{(a_px^2+b_px+c_p)^j}$$

donde

$g(x) = (x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_n)^{m_n}(a_1x^2+b_1x+c_1)^{r_1} \cdot \ldots\ldots \cdot (a_px^2+b_px+c_p)^{r_p}$ y los

coeficientes $A_{1i},\ldots,A_{ni},B_{1j},\ldots,B_{pj},C_{ij},\ldots,C_{pj}$ son números reales

Ejemplo.

Exprese como suma de fracciones parciales la fracción racional $\dfrac{x+1}{x^3+1} \in R(x)$

Solución.

Como $x^3+x = x(x^2+1)$ y x^2+1 es irreducible en $R[x]$ entonces la descomposición es

$\dfrac{x+1}{x^3+1} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$.Debemos determinar los números reales A,B,C; multiplicando la

última igualdad por $x(x^2+1)$ obtenemos: $x+1 = A(x^2+1)+(Bx+C)x$

Si $x=0$ concluimos $1=A$

Si , por ejemplo, $x=1$ entonces $2=2A+(B+C)$, es decir, $B+C=0$

Si $x=-1$ entonces $0=2A+(-1)(-B+C)$ de donde $B-C=-2$

Resolviendo el sistema formado por las dos últimas ecuaciones obtenemos $B=-1, C=1$,

de donde $\dfrac{x+1}{x^3+1} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{-x+1}{x^2+1}$

Ejemplo.

Exprese como suma de fracciones parciales la fracción racional $\frac{x+1}{x^3+1} \in C(x)$

Solución.

Como $x^3 + x = x(x^2+1) = x(x+i)(x-i)$ entonces $\frac{x+1}{x^3+1} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+i} + \frac{C}{x-i}$, debemos determinar los números complejos A, B, C

Al multiplicar la última expresión por $x(x+i)(x-i)$ obtenemos:

$$x+1 = A(x+i)(x-i) + Bx(x-i) + Cx(x+i)$$

Si $x = 0$ entonces $1 = A(-i^2)$ de donde $A = 1$

Si $x = i$ entonces $1+i = Ci(2i)$, es decir, $1+i = -2C$ de donde $C = \frac{1+i}{-2}$

Si $x = -i$ entonces $1-i = B(-i)(-2i)$, es decir, $1-i = -2B$ de donde $B = \frac{1-i}{-2}$

Así, $\frac{x+1}{x^3+1} = \frac{1}{x} + \frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}{x+i} + \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{x-i}$

7.11 EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Considere los polinomios $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 3$, $q(x) = 3x^2 + 6x - 2 \in \Re[x]$ y $p(x) \cdot q(x) = r(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$, $p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_1 x^i$

   Determine, usando las definiciones correspondientes

   a) d_2 b) c_4

2) Sean $p(x) = 4 + 3x + 3x^2$, $q(x) = 3 + 2x + 4x^2 \in Z_5[x]$, determine:

   a) $p(x) + q(x)$ b) $p(x) \cdot q(x)$

   Resp. a) $2 + 2x^2$

3) Verifique que, en $Z_5[x]$ se cumple:

   a) $(x-1)(x^3 + 4x^2 4x + 1) = x^4 + 3x^3 + 2x + 4$

   b) $(x-1)(x+1) = x^2 + 4$

4) Usando el Teorema del Resto demuestre el enunciado dado, si $n \in Z^{+}$
   a) $x^n - a^n$ es divisible exactamente por $x+a$ si n es par
   b) $x^n + a^n$ es divisible exactamente por $x+a$ si n es impar
   c) $x^n + a^n$ no es divisible exactamente por $x+a$ si n es par
   d) $x^n + a^n$ no es divisible exactamente por $x-a$ si n es par

5) En los siguientes ejercicios obtenga el cuociente y el resto usando la división sintética
   a) $(x^3 + 4x^2 + 7x - 2) \div (x+2)$ Resp. $x^2 + 2x + 3\ ,\ -8$
   b) $(x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 11x - 7) \div (x-3)$
   c) $(x^6 - x^4 + x^2 - 2) \div (x-1)$ Resp. $x^5 + x^4 + x + 1,\ -1$
   d) $(4x^4 - 3x^2 + 3x + 7) \div (x + \frac{1}{2})$ Resp. $4x^3 - 2x^2 - 2x + 4\ ,\ 5$

6) Demostrar que $x-1$ y $x+2$ son factores de $p(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ y determinar los factores restantes Resp. $x-2\ ,\ x+3$

7) Comprobar que dos de las raíces de la ecuación $x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48 = 0$ son 2 y –4 y hallar las raíces restantes Resp. 3, -2

8) Usar la división sintética para hallar el cuociente y el resto al dividir el polinomio $2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - x + 3$ por $2x+1$. *Sugerencia.* Efectuar la división sintética dividiendo por $x + \frac{1}{2}$ y luego dividir el cuociente por 2
   Resp. $x^3 - 3x^2 + 3x - 2\ ,\ 5$

9) Determine $p(x) \in Z_7[x]$, mónico de grado 3 tal que $x-1, x-2$ son factores de $p(x)$ y además $p(4) = p(3)$ Resp. $(x-1)(x-2)(x+6) = (x+6)^2(x+5)$

10) Determine si $x-3$ es factor de $p(x) = x^4 + x^3 + x + 4$ en $Q[x], Z_3[x], Z_5[x]$
   Resp. $p(3) = 115$ en $Q[x]$, luego no es factor
   $p(3) = 1$ en $Z_3[x]$, luego no es factor
   $p(3) = 0$ en $Z_5[x]$, luego si es factor

11) Usar el Teorema del resto para determinar el valor de k que hace que el polinomio $3x^3 - 2x^2 + kx - 8$ sea divisible exactamente por $x - 2$ Resp. $k = -4$

12) Hallar el valor de k para que al dividir el polinomio $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + kx - 7$ por $x - 2$, el resto sea 3 Resp. $k = -5$

13) Hallar los valores de a y b que hagan que 2 y –3 sean raíces de la ecuación $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 30 = 0$

14) Determinar a, b, c de modo que $(x-3)(x+1)(x-1)$ sea factor de $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + c$ Resp. $a = 8,\ b = 5,\ c = -6$

15) Sea $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Al dividir $p(x)$ tanto por $x + 2$ como por $x + 3$ el resto que se produce es cero; pero al dividir por $x - 1$ el resto es –12. Calcular el valor de $A = 14a - 4b + 3c$ Resp. $a = 3,\ b = -4,\ c = -12$

16) Al dividir un polinomio $p(x)$ separadamente por $x - 1$ y $x - 2$ se obtiene como resto a 5 y 3 respectivamente. Calcular el resto que se produce al dividir $p(x)$ por el producto $(x-1)(x-2)$ Resp. $-2x + 7$

17) En cada uno de los ejercicios siguientes, comprobar que la ecuación dada tiene como raíces los valores indicados de r, y hallar las raíces restantes
   a) $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$; $r = 2$ Resp. $2 \pm i$
   b) $x^4 - x^3 - 9x^2 + 3x + 18 = 0$; $r = 3,\text{-}2$ Resp. $\pm\sqrt{3}$

18) Comprobar que la ecuación $x^4 - 11x^2 - 12x + 4 = 0$ tiene la raíz doble –2 y hallar las restantes raíces Resp $2 \pm \sqrt{3}$

19) En cada uno de los siguientes ejercicios, se dan unas raíces de la ecuación. Hallar las raíces restantes
   a) $x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0$; $1 - i$ Resp. $1 + i$, -3
   b) $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5 = 0$; $2 - i$ Resp. $2 + i, 1, 1$
   c) $x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 32x^2 + 15x - 25 = 0$; $1 - 2i$, i Resp. $-i,\ 1 + 2i,\ 5$

20) Determine la ecuación mónica de grado mínimo con coeficientes reales que tenga las raíces indicadas
   a) $-2,\ 3+i$ Resp. $x^3-4x^2-2x+20=0$
   b) $1, 3, 1+2i$
   c) $2+4i,\ 2i$ Resp. $x^4-4x^3+24x^2-16x+80=0$
   d) –2, -1, 1, 2 Resp. x^4-5x^2+4

21) Demostrar que la ecuación $x^7+4x^6+2x^3+9x^2+6=0$ tiene por lo menos 4 raíces complejas

22) Demostrar que la ecuación $4x^4-3x^3-x-10=0$ tiene exactamente dos raíces complejas

23) En la ecuación $x^n+1=0$, demostrar:
   a) si n es par, las n raíces son complejas
   b) si n es impar, hay exactamente una raíz negativa igual a –1 y n-1 raíces complejas

24) Demostrar que una ecuación cuyos términos son todos positivos no tiene raíces positivas

25) Demostrar que una ecuación completa que tiene sólo términos pares , todos con el mismo signo, no tiene raíces reales

26) Demostrar que la ecuación $2x^6+5x^4-4x^2-8=0$ tiene exactamente cuatro raíces complejas

27) Encontrar todas las raíces de las siguientes ecuaciones
   a) $3x^3-4x^2-35x+12=0$ Resp. 4, -3, $\frac{1}{3}$
   b) $2x^3+\frac{29}{3}x^2-\frac{40}{3}x+4=0$ Resp. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$, - 6
   c) $4x^5-4x^4-5x^3+x^2+x=0$ Resp. $0, \pm\frac{1}{2}, \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
   d) $x^3+3x^2-4x-12=0$ Resp. $-3,\ -2,\ 2$

28) En $Z_5[x]$ determine los ceros de $p(x) = x^4 + 3x^3 + 2x + 4$

Resp. $p(x) = (x-1)^3(x+1)$ es decir, 1 de multiplicidad 3 y $-1 \equiv 4(\mathrm{mod}\, 5)$

29) Hallar todas las raíces raciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 6x + 4 = 0$ Resp. -2

b) $x^7 - 3x^6 + x^5 - 3x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$ Resp. 3

c) $x^4 + 4x^2 - x + 6 = 0$ Resp. ninguna raíz racional

30) Las dimensiones de una caja rectangular son 3 cm, 5 cm, y 7 cm. Si cada una de estas dimensiones se aumenta en la misma cantidad, su volumen se triplica; alcular esta cantidad Resp. 2 cm.

31) En cada una de las siguientes ecuaciones, hallar la raíz indicada con una cifra decimal

a) $x^3 - 3x^2 + 3x - 5 = 0$, $2 < x < 3$ Resp. 2,6

b) $x^3 + 3x^2 + 2x - 7 = 0$, $1 < x < 2$ Resp. 1,1

c) $x^3 - 3x^2 - 26x + 69 = 0$, $2 < x < 3$ Resp. 2,5

32) Resolver la ecuación $4x^3 - 12x^2 + 3x + 5 = 0$ sabiendo que las raíces están en progresión aritmética Resp. $-\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}$

33) Resolver la ecuación $4x^3 - x^2 - 16x + 4 = 0$ si una raíz es el negativo de la otra

Resp. $2, -2, \frac{1}{4}$

34) Resolver la ecuación $x^3 + 2x^2 - 15x - 36 = 0$ sabiendo que tiene una raíz doble

Resp. –3, -3, 4

35) Resolver la ecuación $3x^3 + 17x^2 - 87x + 27 = 0$ si una raíz es el recíproco de otra

Resp. $3, \frac{1}{3}, -9$

36) Resolver $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$ sabiendo que tiene una raíz triple

Resp. 2 (de multiplicidad 3) y –1

37) Resolver la ecuación $2x^3 + 9x^2 + 10x + 3 = 0$ si las raíces están en la proporción $1 : 2 : 6$ Resp. $-\frac{1}{2}, \ -1, \ -3$

38) Determine la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ Resp. $p^2 - 2q$

39) Si dos raíces de la ecuación $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ son iguales en valor absoluto pero de signos contrarios demuestre que $pq = r$

40) En cada uno de los siguientes ejercicios descomponga la fracción dada en sus fracciones parciales y comprobar el resultado

a) $\dfrac{3x^2 - 4x + 5}{(x-1)(x^2+1)} \in \Re(x)$ Resp. $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{x-3}{x^2+1}$

b) $\dfrac{2x^3 - 4x^2 + 4x - 4}{(x^2+1)(x^2+2)} \in \Re(x)$ Resp. $\dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{4}{x^2+2}$

c) $\dfrac{2x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^4 + x^3 + 3x^2} \in \Re(x)$ Resp. $2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{x-1}{x^2+x+3}$

d) $\dfrac{2x+4}{x^3+4x} \in \Re(x)$ Resp. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{-x+2}{x^2+4}$

e) $\dfrac{2x+4}{x^3+4x} \in C(x)$ Resp. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}{x+2i} + \dfrac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{x-2i}$