Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Matemática I para Administración Pública
Primer Semestre 2015

Profesores: Valeska Alarcón - Juan Aravena

Sumatorias

Ejercicios Resueltos

1. Exprese las siguientes sumas usando la notación de sumatorias y calcule su resultado

   a) $3+4+5+6+7+8+9+10+11+12$

   Solución: Podemos expresar esta suma, notando que los términos están ordenados de manera creciente y corresponden a la suma desde 3 hasta 12 de manera sucesiva. Escribimos entonces

$$3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=\sum_{i=3}^{12} i$$

   Ó equivalentemente, y usando la propiedad de sumatorias

$$3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=\sum_{i=1}^{10}(i+2)$$

   Desarrollando la última expresión, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10}(i+2) &= \sum_{i=1}^{10} i+\sum_{i=1}^{10} 2\\ &= \frac{10\cdot(10+1)}{2}+10\cdot 2\\ &= 75.\end{aligned}$$

   Observación (Importante)**.** *Note que aplicamos las fórmulas de "sumas especiales" sólo cuando el contador de la sumatoria comienza en* 1.

   □

b) $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14$

Solución: Observemos primero que la expresión es equivalente a la suma siguiente

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2-(5+6+7+8+9+10+11+12+13+14)$$

es decir, podemos separarla en dos sumatorias; una que corresponde a la suma de los cuadrados de los primeros 7 números consecutivos y otra correspondiente a la suma desde 5 a 14. Así, tenemos que

$$\begin{multline} 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+ \\ -(5+6+7+8+9+10+11+12+13+14)=\sum_{i=1}^{7} i^2-\sum_{i=5}^{14} i \end{multline}$$

Tenemos entonces que, las sumatorias son

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{7} i^2-\sum_{i=5}^{14} i &= \sum_{i=1}^{7} i^2-\sum_{i=1}^{10}(i+4) \\ &= \sum_{i=1}^{7} i^2-\sum_{i=1}^{10} i-\sum_{i=1}^{10} 4 \\ &= \frac{7\cdot(7+1)\cdot(2\cdot 7+1)}{6}-\frac{10\cdot(10+1)}{2}-10\cdot 4 \\ &= 45. \end{aligned}$$

□

c) $6+13+20+27+34+41$

Solución: Observemos que, la diferencia entre términos consecutivos es siempre igual a 7.
Notamos también que el primer término, llamémoslo a_1, es

$$a_1=6=7-1=7\cdot 1-1.$$

El segundo término, llamémoslo a_2, es

$$a_2=13=14-1=7\cdot 2-1.$$

El tercero es

$$a_3=20=21-1=7\cdot 3-1,$$

y así sucesivamente.
Podemos entonces generalizar la expresión buscando el i-ésimo término de la

suma, que corresponderá a $a_i = 7 \cdot i - 1$.
Con esto claro[1] escribimos la suma como

$$\begin{aligned} 6+13+20+27+34+41 &= \sum_{i=1}^{6} a_i \\ &= \sum_{i=1}^{6}(7\cdot i - 1) \\ &= 7\cdot\sum_{i=1}^{6} i - \sum_{i=1}^{6} 1 \\ &= 7\cdot\frac{6\cdot(6+1)}{2} - 6\cdot 1 \\ &= 141. \end{aligned}$$

□

2. Calcular las siguientes sumatorias sabiendo que $k_1 = 2$; $k_2 = -1$; $k_3 = 5$

   a) $\sum_{i=1}^{3}(2k_i - 3k_i)$

   Solución: Desarrollando la sumatoria

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3}(2k_i - 3k_i) &= \sum_{i=1}^{3}(-k_i) \\ &= -1\cdot\sum_{i=1}^{3} k_i \\ &= -1\cdot(k_1+k_2+k_3) \end{aligned}$$

   que reemplazando por los valores dados, es igual a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3}(2k_i - 3k_i) &= -1\cdot(k_1+k_2+k_3) \\ &= -1\cdot(2-1+5) \\ &= -6. \end{aligned}$$

□

[1]Si aún no lo tiene claro compruebe, por ejemplo, que el quinto término corresponde a

$$a_5 = 7\cdot 5 - 1$$

¿Cuál será el cuarto término?, ¿y el sexto?.

b) $\displaystyle\sum_{i=2}^{3}(k_i + \sqrt{8-k_i})$

Solución: En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{3}(k_i + \sqrt{8-k_i}) &= \sum_{i=2}^{3} k_i + \sum_{i=2}^{3}\sqrt{8-k_i} \\ &= (k_2+k_3) + \left(\sqrt{8-k_2} + \sqrt{8-k_3}\right)\end{aligned}$$

luego reemplazando tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{3}(k_i + \sqrt{8-k_i}) &= (k_2+k_3) + \left(\sqrt{8-k_2} + \sqrt{8-k_3}\right) \\ &= (-1+5) + \left(\sqrt{8-(-1)} + \sqrt{8-5}\right) \\ &= 4 + \left(\sqrt{9} + \sqrt{3}\right) \\ &= 7 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

□

c) $\displaystyle\sum_{i=2}^{3}(k_i - k_i^2)$

Solución: Simplemente reemplazamos los términos y tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{3}(k_i - k_i^2) &= (k_2 - k_2^2) + (k_3 - k_3^2) \\ &= (-1-(-1)^2) + (5-5^2) \\ &= -22.\end{aligned}$$

□

d) $\sum_{i=1}^{2}(2+k_i)$

Solución: Notemos que

$$\sum_{i=1}^{2}(2+k_i)=\sum_{i=1}^{2}2+\sum_{i=1}^{2}k_i$$

luego reemplazando, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}(2+k_i) &= \sum_{i=1}^{2}2+\sum_{i=1}^{2}k_i\\ &= 2\cdot 2+k_1+k_2\\ &= 2\cdot 2+2+-1\\ &= 5.\end{aligned}$$

□

3. Determine el valor de x si se sabe que $\sum_{k=1}^{6}xk=630$

Solución: Siendo x la incógnita, que no depende del contador k podemos escribir la sumatoria

$$\sum_{k=1}^{6}xk=x\cdot\sum_{k=1}^{6}k$$

donde sabemos que

$$\begin{aligned}x\cdot\sum_{k=1}^{6}k &= x\cdot\left[\frac{6\cdot(6+1)}{2}\right]\\ &= 21x\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\left(\sum_{k=1}^{6}xk=630\right)\quad\Longleftrightarrow\quad(21x=630)$$

de donde obtenemos el valor buscado simplemente dividiendo entre 21

$$x=30.$$

□

4. Considerando que $\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(3n-1)}{2}$, determine el resultado de $\sum_{i=7}^{15} a_i$

Solución: Recordemos primero que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$

Con esto en cuenta, notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=7}^{15} a_i &= a_7 + a_8 + ... + a_{14} + a_{15} \\
&= a_1 + a_2 + ... + a_6 + a_7 + a_8 + ... + a_{14} + a_{15} - (a_1 + a_2 + ... + a_5 + a_6) \\
&= \sum_{i=1}^{15} a_i - \sum_{i=1}^{6} a_i
\end{aligned}$$

y sabiendo que $\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(3n-1)}{2}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=7}^{15} a_i &= \sum_{i=1}^{15} a_i - \sum_{i=1}^{6} a_i \\
&= \frac{15 \cdot (3 \cdot 15 - 1)}{2} - \frac{6 \cdot (3 \cdot 6 - 1)}{2} \\
&= 279.
\end{aligned}$$

□

5. Determine el valor de $\sum_{i=k}^{k+4} (i^2 - 3)$

Solución: Digamos, para comprender mejor el problema que $a_i = i^2 - 3$. Luego tenemos la siguiente sumatoria (usando el mismo argumento que en el ejercicio anterior)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{k+4} a_i &= a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + a_{k+4} \\
&= a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + a_{k+4} - (a_1 + a_2 + ... + a_{k-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+4} a_i - \sum_{i=1}^{k-1} a_i
\end{aligned}$$

Reescribamos entonces la expresión original $a_i = i^2 - 3$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{k+4} a_i &= \sum_{i=1}^{k+4} a_i - \sum_{i=1}^{k-1} a_i \\
&= \left[\sum_{i=1}^{k+4} \left(i^2 - 3\right)\right] - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(i^2 - 3\right)\right] \\
&= \left[\sum_{i=1}^{k+4} i^2 - 3 \cdot \sum_{i=1}^{k+4} 1\right] - \left[\sum_{i=1}^{k-1} i^2 - 3 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} 1\right] \\
&= \left[\frac{(k+4)(k+4+1)(2(k+4)+1)}{6} - 3(k+4)\right] - \\
&\qquad \left[\frac{(k-1)(k-1+1)(2(k-1)+1)}{6} - 3(k-1)\right] \\
&= 5k^2 + 20k + 15.
\end{aligned}$$

Observación (Otra manera de abordar el problema)**.** *Notemos que*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{k+4} (i^2 - 3) &= (k^2 - 3) + ((k+1)^2 - 3) + ((k+2)^2 - 3) + ((k+3)^2 - 3) + ((k+4)^2 - 3) \\
&= 5k^2 + 20k + 15.
\end{aligned}$$

$\square$

6. Si $a_i = i^2$, calcule el valor de $\left(\sum_{i=1}^{4} (a_i + 3)\right)^2$

Solución: Notemos primero que la sumatoria, sin el cuadrado, es equivalente a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} (a_i + 3) &= \sum_{i=1}^{4} a_i + 3 \cdot \sum_{i=1}^{4} 1 \\
&= \sum_{i=1}^{4} i^2 + 3 \cdot 4 \\
&= \frac{4(4+1)(2 \cdot 4 + 1)}{6} + 3 \cdot 4 \\
&= 42
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{4} (a_i + 3)\right)^2 &= (42)^2 \\
&= 1764.
\end{aligned}$$

$\square$

7. Si, para todo $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{m} a_i = 2m^2 + 3$, calcule el valor de $\sum_{i=n+1}^{2n} a_i$

Solución: Escribamos la sumatoria, como ya hicimos con algunos ejercicios anteriores:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=n+1}^{2n} a_i &= a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{2n-1} + a_{2n} \\
&= a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{2n-1} + a_{2n} - (a_1 + a_2 + ... + a_n) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i
\end{aligned}$$

Usamos ahora el resultado dado que para todo m, $\sum_{i=1}^{m} a_i = 2m^2 + 3$, con m= 2n y con m= n, en donde

$$\begin{aligned}
\sum_{i=n+1}^{2n} a_i &= \sum_{i=1}^{2n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&= 2(2n)^2 + 3 - \big(2n^2 + 3\big) \\
&= 6n^2.
\end{aligned}$$

□

8. Usando la propiedad telescópica, muestre que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Solución: Observemos que el término general de la sumatoria $\frac{1}{k(k+1)}$, lo podemos descomponer usando fracciones parciales, esto es, buscamos constantes A y B tales, que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k(k+1)} &= \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \\
&= \frac{A(k+1) + Bk}{k(k+1)} \\
&= \frac{k(A+B) + A}{k(k+1)}
\end{aligned}$$

de donde necesitamos que $A + B = 0$ y $A = 1$, luego $B = -1$.
Por lo tanto podemos escribir el término general como

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{-1}{k+1}$$

y entonces a la sumatoria se le puede aplicar la propiedad telescópica, pues

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

$\square$